Прогнозирование функциями дискретного аргумента*

Е. А. Будников

Московский физико-технический институт, ФУПМ, каф. «Интеллектуальные системы»

В работе исследуются короткие временные ряды на примере монофонических музыкальных мелодий. Происходит прогнозирование одной ноты экспоненциальным сглаживанием, локальным методом, а также методом поиска постоянных закономерностей.

Вычислительный эксперимент проводится на двух мелодиях, одна из которых имеет точно повторяющиеся фрагменты.

Ключевые слова: *временной ряд, прогнозирование мелодий, машинное обучение, прогнозирование функциями дискретного аргумента, локальные методы прогнозирования, поиск постоянных закономерностей.*

Введение

В отчете представлена попытка прогнозирования таких специфических временных рядов, как монофонические мелодии. Были осуществлены три различных подхода: экспоненциальное сглаживание, локальное прогнозирование и поиск постоянных закономерностей. Первый из них — хорошо разработанный метод, описанный в [1, 2]. Второй описан, например, в [9]. Третий предлагается в полной мере в работах [7, 6].

Предлагается опробовать первый метод в традиционной его форме, чтобы ответить на вопрос, пригоден ли он для решения данной задачи. Затем предлагается во втором методе проверить работоспособность коэффициента корреляции Пирсона в качестве меры сходства. Третий будет использоваться в упрощенном варианте.

Постановка задачи

Мелодия есть функция $m: T \to X \times Y$, где $T = 0, 1, 2, \ldots$ — позиция ноты, $X = 0, 1, 2, \ldots$ — конечное множество нот, занумерованных в порядке увеличения тона, Y — длительность ноты, в секундах. Таким образом, будем работать с пучком из двух временных рядов.

Предполагается, что мелодия дана законченная, но без нескольких финальных нот(без ограничения общности одной). Необходимо их предсказать.

Пути решения задачи

Экспоненциальное сглаживание . Пусть $X = \{x_1, \ldots x_T\}$ — временной ряд. Экспоненциальное сглаживание ряда осуществляется по рекуррентной формуле:

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\, S_{t-1},\ \alpha \in (0,1).$$

Чем меньше α, тем в большей степени фильтруются, подавляются колебания исходного ряда и шума.

Если последовательно использовать рекуррентное это соотношение, то экспоненциальную среднюю S_t можно выразить через значения временного ряда X.

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\,(\alpha x_{t-1} + (1-\alpha) S_{t-2}) = \cdots = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i x_{t-i} + (1-\alpha)^t S_0.$$

---

* Научный руководитель В. В. Стрижов

После появления работ Р. Брауна экспоненциальное сглаживание часто используется для решения задачи краткосрочного прогнозирования временных рядов следующим способом. Пусть задан временной ряд: $y_i \cdots y_t,\ y_i \in R$. Необходимо решить задачу прогнозирования временного ряда, т.е. найти $\hat{y}_{t+d} = f_{t,d}\left(y_1...y_t\right),\ d \in \{1, 2, ...D\},\ D$ — горизонт прогнозирования, необходимо, чтобы $Q_T = \sum_{i=1}^{T}\left(y_i - \hat{y}_i\right) \rightarrow min$

Предположим, что D - невелико (краткосрочный прогноз), то для решения такой задачи используют модель Брауна. $\hat{y}_{t+d} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t,\ \hat{y}_0 = y_0,\ \alpha \in (0, 1)$. Если рассматривать прогноз на 1 шаг вперед, то $(y_t - \hat{y}_t)$ — погрешность этого прогноза, а новый прогноз $\hat{y}_{t+1}$ получается в результате корректировки предыдущего прогноза с учетом его ошибки — суть адаптации.

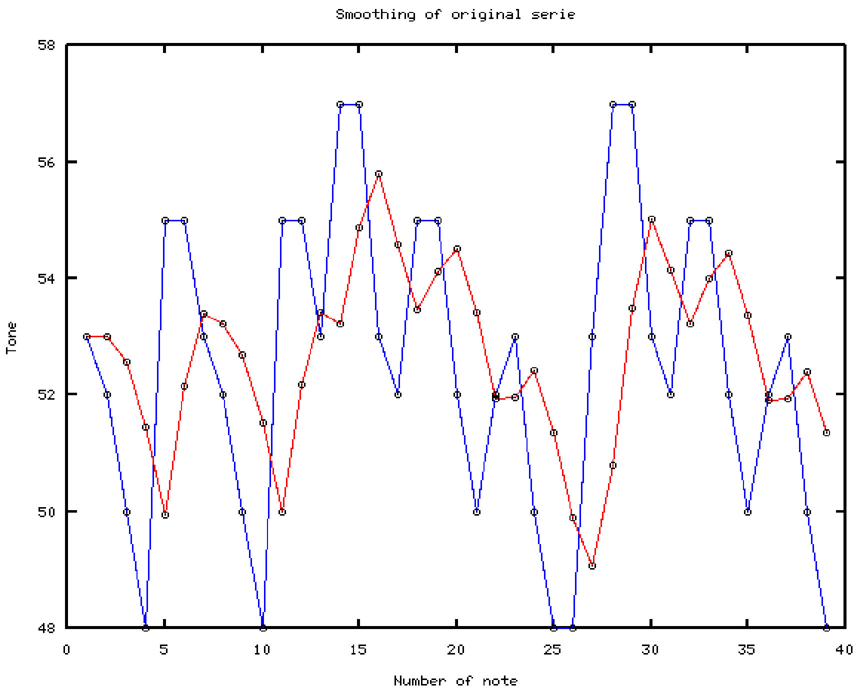

Рис. 1. Изначальный временной ряд Гуси.mid и его экспоненциальное сглаживание

При краткосрочном прогнозировании желательно как можно быстрее отразить новые изменения и в то же время как можно лучше "очистить"ряд от случайных колебаний. Т.о. следует увеличивать вес более свежих наблюдений: $\alpha \rightarrow 1,\ \hat{y}_{t+d} \rightarrow y_t$.

С другой стороны, для сглаживания случайных отклонений, α нужно уменьшить: $\alpha \rightarrow 0,\ \hat{y}_{t+1} \rightarrow \bar{y}_t$. Т.о. эти два требования находятся в противоречии. Мы будем брать α из интервала (0,0.5).

Локальные методы прогнозирования. Музыкальный временной ряд отличается от обычного хаотического: он почти не хаотичен (для специалистов, я думаю, слово "почти" можно убрать). В нем встречаются похожие, повторяющиеся и прочие регулярные структуры.

Определение 1. *Регулярной структурой назовем кусок временного ряда, обладающий автономностью по отношению к остальному временному ряду, склонный к повторению в немного искаженной форме*

Очевидно, что "немного"должно определяться некой функцией близости. В работе использовался вариант коэффициента корреляции Неймана-Пирсона:

$$k(f,g) = \frac{\int fg}{\sqrt{\int f^2} \cdot \sqrt{\int g^2}},$$

где интеграл понимается в смысле суммы в силу дискретности функций.

Прогноз будет строиться на естественном предположении компактности регулярных структур: у похожих кусков временного ряда должны быть похожие продолжения. Воспользуемся самым простым локальным алгоритмом, который ищет ближайшего соседа к прогнозируемому участку.

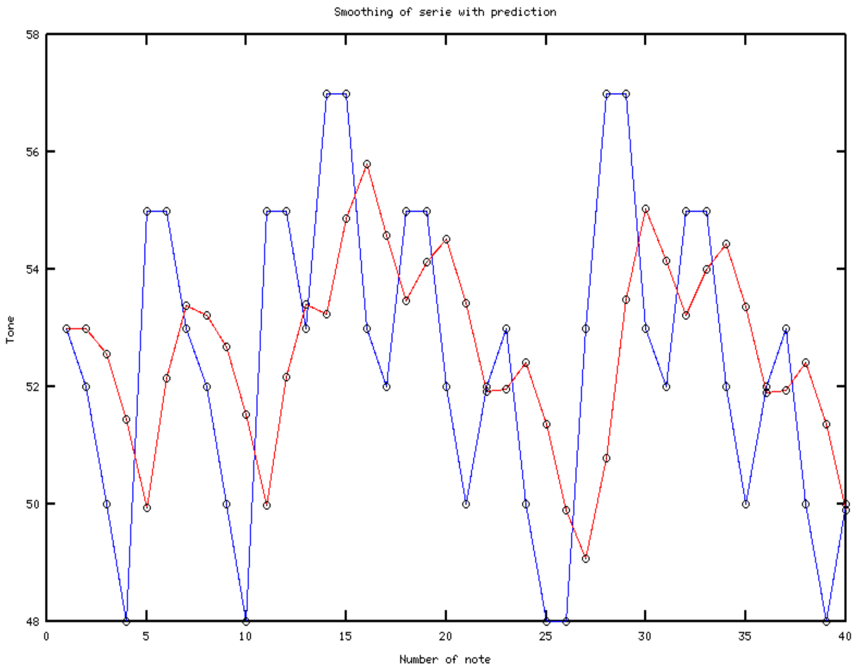

Рис. 2. Временной ряд с предсказанной точкой

Поиск постоянных закономерностей. Рассмотрим один из подходов к поиску закономерностей в пучках временных рядов, который предполагает отсутствие изменений в закономерностях с течением времени. Для простоты будем рассматривать единственный временной ряд длины T вместо пучка.

Маской ω на отрезке назовем булеву строку длины N (здесь параметр N определяет максимальный отступ по времени). Число единиц в маске ω будем называть весом маски и обозначать $H(\omega)$. Элемент маски, находящийся на i-ом месте будем обозначать $\omega(i)$ или ω_i. Закономерностью R назовем пару $(\omega; f)$, где маска ω указывает на значения ряда, являющиеся аргументами функции f, а частично-определенная функция f задает зависимость значений целевого ряда от переменных, на которые указывает маска ω.

$$f : X^{H(\omega)} \to X \cup \{\lambda\},$$

где λ означает, что функция не определена на соответствующем наборе переменных.

Зафиксировав теперь маску $\omega = [1,1,1]$, построим множество пар (α_t, v_t), где $\alpha_t = [m(t), m(t+1), m(t+2)]$, а $v_t = m(t+3)$, $t \in \{1,2,\ldots,T-3\}$. Полученное множество пар записывается в виде таблицы частот $\|\nu_{\alpha,v}\|$ с числом строк, равным числу всех возможных наборов из $X^{H(\omega)} = x^3$, и числом столбцов, равным $|X|$. Элемент таблицы частот $\|\nu_{\alpha,v}\|$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant |X|^3 - 1,\ 0 \leqslant v \leqslant |X|-1)$ — это число раз, которое значение v встречается во входных данных на наборе $\tilde{\alpha}$ с номером α из X^3. (Предполагается, что наборы расположены в лексикографическом порядке.)

Обозначим $\nu_{\alpha,max} = \max\limits_{v \in \{1,2,\ldots,|X|-1\}} \nu_{\alpha,v}$ и $v_m = \arg\max\limits_{v \in \{1,2,\ldots,|X|-1\}} \nu_{\alpha,v}$ (в случае если максимум достигается на нескольких значениях, v_m выбирается среди этих значений произвольным образом). Обозначим также $\nu_{\alpha,max-1} = \max\limits_{v \in \{1,2,\ldots,|X|-1\}, v \neq v_m} \nu_{\alpha,v}$ и $\nu_\alpha = \sum_{v=0}^{|X|-1} \nu_{\alpha,v}$.

На основе таблицы частот порождается закономерность $(\omega; f)$, где частично- определенная функция f задается на каждом наборе $\tilde{\alpha}$ из X^3 следующим образом:

$$f(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} v_m, & \text{если } \nu_{\alpha,max} - \nu_{\alpha,max-1} \geqslant k \cdot \nu_\alpha \\ \lambda, & \text{иначе} \end{cases}$$

Здесь символ λ обозначает отсутствие значения на данном наборе, а k — параметр алгоритма, $0 < k < 1$.

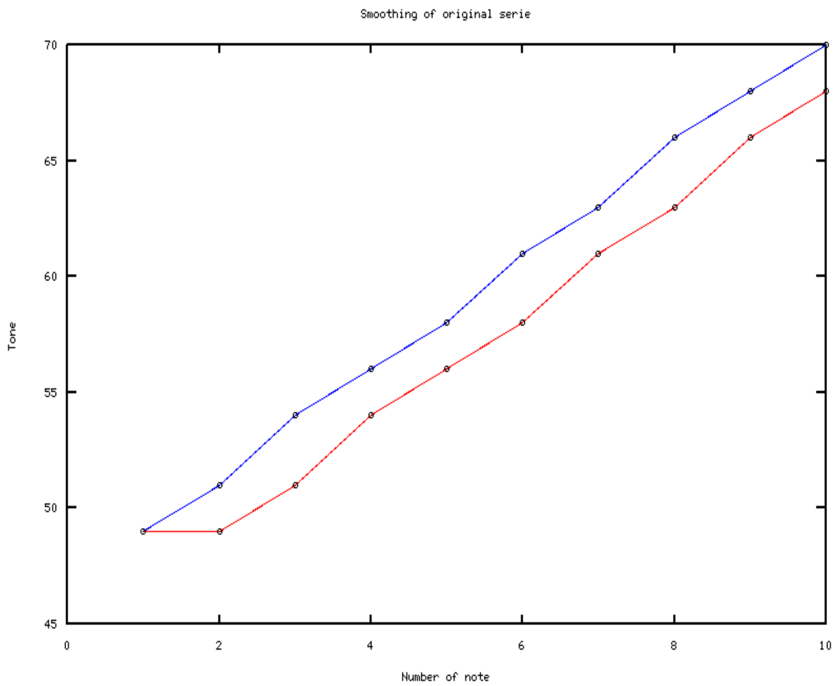

Рис. 3. Изначальный временной ряд китайское.mid и его экспоненциальное сглаживание

Вычислительный эксперимент

Экспоненциальное сглаживание. В качестве исследуемой мелодии сначала был взят файл Гуси.mid, см. рис. 1. Для экспоненциального сглаживания была выбрана α, при которой среднеквадратичное отклонение ряда от его сглаживания было минимальным. Это значение оказалось равным $\alpha = 0.4361$. Предсказанная последняя нота на рис. 2:

Теперь исследуем другую мелодию, еще более короткую, китайское.mid, рис. 3. Значение параметра здесь оказалось равным $\alpha = 1$. И все равно экспоненциальное сглаживание не может "догнать"ряд, см. рис. 4.

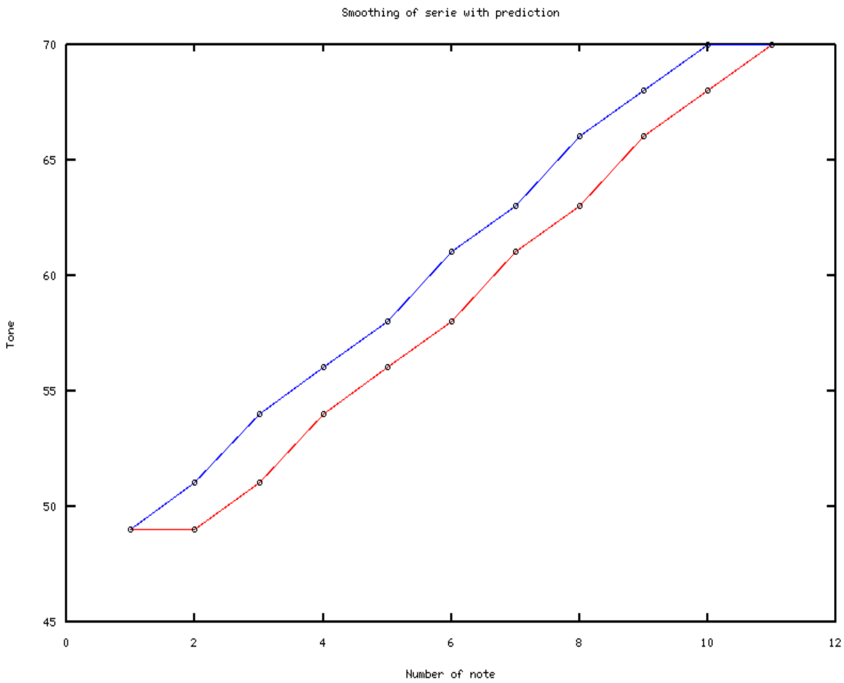

Рис. 4. Временной ряд с предсказанной точкой

Локальное прогнозирование. Локальное прогнозирование оказалось успешней. В случае первой мелодии оно не только правильно нашло похожий кусок мелодии и правильно предсказало финальную ноту, но и в случае многократной прогонки алгоритма повторяло последнее предложение мелодии. Результаты работы алгоритма представлены в файлах out1.mid и out2.mid.

Поиск постоянных закономерностей. В качестве исследуемой мелодии снова был взят файл Гуси.mid. Метод оказался удачным. Результаты работы алгоритма представлены в файле out3.mid.

Заключение

В заключение можно сказать, что проделана совсем небольшая работа, но уже точно можно сказать, что экспоненциальное сглаживание не может быть использовано для успешного решения поставленной задачи. Локальные же методы представляются более перспективными в том плане, что на мелодиях, обладающих некими похожими повторяющимися фрагментами, есть смысл использовать именно такие методы. К сожалению, в работе были проделаны исследования лишь с одной метрикой, имеет смысл исследовать поведение других метрик.

Метод поиска постоянных закономерностей оказался также удачным. Тем не менее, я склонен рассматривать это следствием того, что мелодия имела точно повторяющиеся куски. То есть для прогноза был найден идентичный кусок, ранее встречавшийся в мелодии, а в качестве прогноза была просто взята следующая за упомянутым куском нота. В силу малой длины мелодии построенная функция оказалась крайне мало определенной на множестве всевозможных наборов из X^3. Возможным выходом из данной ситуации, кроме очевидного увеличения длины известной части мелодии, я полагаю выделение при помощи эксперта либо методами кластеризации примитивных элементов мелодии, дальнейшее ее кодирование в терминах этих примитивов. Этот шаг позволит снизить мощность множества допустимых значений временного ряда, а следовательно и множества всевозможных наборов из него же. И искомая частично-определенная функцая будет определен плотнее.

Необходимый для повторения вычислительного эксперимента код можно найти на сайте:
`https://mlalgorithms.svn.sourceforge.net/svnroot/mlalgorithms/DiscreteForecasting/`

Литература

[1] *Brown, R.G.*. Smoothing forecasting and prediction of discrete time series / Brown, R.G.—N.Y., 1963.

[2] *Brown, R.G. and Meyer, R.F.*. The fundamental theorem of exponential smoothing / Brown, R.G. and Meyer, R.F.—Oper. Res., 1961.

[3] *Kohonen, T.*. The Self-Organising Map / T. Kohonen.—Proceedings of the IEEE, 1990.

[4] *Бокс Дж., Дженкинс Г.*. Анализ временных рядов, прогноз и управление. Том 1 / Бокс Дж., Дженкинс Г.—1969.

[5] *Е.М.Четыркин*. Статические методы прогнозирования / Е.М.Четыркин.—Издательство "Статистика 1977.

[6] *Николай Филипенков*. Об алгоритмах прогнозирования процессов с плавно меняющимися закономерностями / Николай Филипенков. –2010.

[7] *Николай Филипенков*. О задачах анализа пучков временных рядов с изменяющимися закономерностями / Николай Филипенков.—2006.

[8] *Ю.П.Лукашин*. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов / Ю.П.Лукашин.—М.: Финансы и статистика, 2003.

[9] *James McNames*. Local Modeling Optimization for Time Series Prediction / James McNames.—European Symposium on Artificial Neural Networks Bruges (Belgium). D-Facto public, 2000.