Уточнение ранговых экспертных оценок с использованием монотонной интерполяции

М. П. Кузнецов
mikhail.kuznecov@phystech.edu
Московский физико-технический институт

Описан способ построения интегральных индикаторов качества объектов с использованием экспертных оценок и измеряемых данных. Каждый объект описан набором признаков в линейных шкалах. Используются экспертные оценки качества объектов и важности признаков, которые корректируются в процессе вычисления. Предполагается, что оценки выставлены в ранговых шкалах. Рассматривается задача получения таких интегральных индикаторов, которые не противоречили бы экспертным оценкам. Предложено два подхода к уточнению экспертных оценок. При первом подходе вектор экспертных оценок рассматривается как выпуклый многогранный конус. Для уточнения экспертных оценок минимизируется расстояние между векторами в конусах. При втором подходе используется задача монотонной интерполяции с гиперпараметром. Проведен вычислительный эксперимент на следующих данных: экспертами оценивался фактор экологического воздействия на окружающую среду хорватских электростанций. Проведена процедура уточнения экспертных оценок.

Ключевые слова: *интегральный индикатор, экспертные оценки, монотонная интерполяция, ранговые шкалы.*

Введение.

При решении задач управления возникает необходимость дать каждому объекту оценку его качества. Интегральный индикатор — это число, поставленное в соответствие объекту, и рассматриваемое как оценка его качества. Интегральными индикаторами называется вектор оценок, поставленный в соответствие набору объектов.

При построении интегральных индикаторов выбирается критерий качества объектов. Формируется набор объектов, сравнимых в контексте выбранного критерия. Формируется набор показателей, которые эксперты считают необходимыми для описания этого критерия. Составляется матрица «объекты-признаки». Значения показателей приводятся к единой шкале и соответствуют принципу «чем больше, тем лучше»: большему значению показателя (при прочих равных) соответствует большее значение индикатора.

Ранее было предложено несколько подходов к построению интегральных индикаторов [1, 2, 3]. Подход «без учителя» заключается в нахождении интегральных индикаторов с помощью описаний объектов и выбранного метода их построения. Например, таковым является построение интегрального индикатора методом главных компонент, согласно которому интегральный индикатор является проекцией векторов-описаний объектов на первую главную компоненту матрицы «объекты-признаки» [4, 5].

Подход «с учителем» использует кроме описаний объектов экспертные оценки качества объектов или оценки важности показателей и заключается в нахождении компромисса между этими оценками и вычисленными индикаторами. Ранее был предложен подход, в котором восстанавливается регрессия описаний объектов на экспертные оценки качества объектов [6, 7].

Данная работа посвящена уточнению экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах. Для построения интегральных индикаторов принимается линейная модель: строится линейная комбинация признаков с их весами. Вектор весов признаков и начальный интегральный индикатор выставляются экспертами в ранговой шкале. В общем случае, построенный по вектору весов интегральный индикатор не совпадает с индикатором, заданным экспертами, то есть экспертные данные противоречат друг другу. Данная работа посвящена устранению разногласия в оценках экспертов.

В работе будут рассмотрены два метода. Первый метод развивает идеи, описанные в [6]. Метод заключается в следующем: ранговые экспертные оценки весов показателей задают выпуклый многогранный конус. Матрица «объекты-признаки» задает линейное отображение этого конуса из пространства показателей в пространство интегральных индикаторов. Полученный в результате отображения конус может пересекаться с конусом, заданным ранговыми экспертными оценками интегрального индикатора. В этом случае, экспертные оценки показателей и объектов считаются непротиворечивыми, и отыскивается наиболее устойчивый интегральный индикатор. В противном случае, выполняется процедура рангового уточнения оценок.

Второй метод состоит в решении задачи монотонной интерполяции [8, 9, 10]. В общем случае, задача монотонной интерполяции, или так называемая «isotonic regression», решает задачу наилучшего приближения произвольной последовательности точек размера n линейного пространства монотонной последовательностью точек пространства. Метод согласования экспертных данных заключается в том, что отыскивается вектор с монотонной последовательностью координат, наиболее близкий к заданному экспертами. Введенный в модель гиперпараметр отдает предпочтение экспертным оценкам индикаторов или оценкам весов признаков.

Предложенные алгоритмы используются для оценивания хорватских электростанций [11]. Данные являются матрицей «объекты-признаки» и заданными экспертами векторами оценок интегрального индикатора и весов признаков. Оценивается производительность электростанций.

Экспертные оценки, заданные в ранговых шкалах.

Задана матрица описаний объектов $X = \{x_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m,n}$. Вектор $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ – описание i–го объекта.
Интегральный индикатор — линейная комбинация вида

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} w_j g_j(x_{ij}),$$

где g_j — функция приведения показателей в единую шкалу, например:

$$g_j : x_{ij} \mapsto (-1)^{\zeta_j} \frac{x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}} + \zeta_j. \tag{1}$$

Параметр ζ_j назначается равным 1, если оптимальное значение показателя минимально, и 0 иначе. Если знаменатель дроби 1 равен нулю для некоторых значений индекса j , то соответствующий признак исключается из дальнейшего рассмотрения. Будем обозначать теперь за X приведенную таким способом матрицу «объекты-признаки». Таким образом,

$$\mathbf{y} = X\mathbf{w}.$$

Заданы в ранговых шкалах экспертные оценки: $\mathbf{y}_0, \mathbf{w}_0$, допускающие произвольные монотонные преобразования. Пусть на наборах экспертных оценок введено отношение порядка такое, что

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant ... \geqslant y_m \geqslant 0; \; w_1 \geqslant w_2 \geqslant ... \geqslant w_n \geqslant 0.$$

Множество всех таких векторов задается системой линейных неравенств

$$J\mathbf{y} \geqslant 0,$$

где

$$\underset{m \times m}{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если же порядок $y_{i_1} \geqslant y_{i_2} \geqslant y_{i_m} \geqslant 0$ произвольный, то матрица системы будет получается из J перестановкой соответствующих столбцов.
Таким образом, заданным $\mathbf{y}_0$ и $\mathbf{w}_0$ можно поставить в соответствие матрицы J_m и J_n размеров соответственно $m \times m$ и $n \times n$.

Решение задачи согласования экспертных оценок с использованием конусов.

В этом параграфе опишем метод согласования экспертных оценок, предложенный в [6]. Дадим некоторые определения.

Определение 1. *Множество точек $\mathcal{Y}$ в $\mathbb{R}^m$ называется конусом, если для любой точки $y \in \mathcal{Y}$ точка λy также принадлежит $\mathcal{Y}$.*

Определение 2. *Выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат — это область решений системы однородных неравенств:*

$$\begin{cases} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n \geqslant 0, \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{2n}w_n \geqslant 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \ldots + a_{mn}w_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система линейных неравенств задает в соответствующем пространстве выпуклый многогранный конус. Соответствуя данному определению, определим $\mathcal{Y}$ — конус, задаваемый матрицей J_m в пространстве интегральных индикаторов; $\mathcal{W}$ — конус, задаваемый матрицей J_n в пространстве весов признаков. Эти конусы характеризуются тем, что векторы внутри каждого из них имеют одинаковый ранговый порядок.
Поскольку A — линейное преобразование, оно переводит конус $\mathcal{W}$ в конус $A\mathcal{W}$, который лежит в пространстве интегральных индикаторов.

Задача 1. Требуется найти в конусах $\mathcal{W}$ и $\mathcal{Y}$ векторы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{y}$, такие, что:

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_1) = \min_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y},\ \mathbf{w}\in\mathcal{W}} \|\mathbf{y} - A\mathbf{w}\|,$$

$$\text{при } \|A\mathbf{w}\| = 1, \|\mathbf{y}\| = 1,$$

где $\|.\|$ — евклидова метрика в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Таким образом, отыскивается вектор весов $\mathbf{w}_1$, элементы которого имеют такой же ранговый порядок, что и $\mathbf{w}_0$. При этом приведенный в ранговую шкалу индикатор $A\mathbf{w}_1$ является ближайшим к $\mathbf{y}_0$.

В случае непустого пересечения конусов $\mathcal{Y}$ и $A\mathcal{W}$ решение задачи (1) дает вектор $\mathbf{y}$, который лежит в пересечении этих конусов. Если пересечение — пустое, предлагается найти ближайшие друг к другу лучи на ребрах или гранях конусов.

Отыскиваемая пара $(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_1)$ должна выполнять следующие условия:

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \|\mathbf{y} - A\mathbf{w}\| & \\ \text{subject to} & \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1, & (A\mathbf{w})^T A\mathbf{w} = 1, \\ & J_n\mathbf{w} \geqslant \mathbf{0}, & J_m\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}. \end{array}$$

Постановка задачи согласования экспертных оценок с использованием монотонной интерполяции.

В данном параграфе рассмотрим новый метод согласования экспертных оценок. Пусть $\mathbf{y}_0$ — заданное экспертами начальное приближение вектора $\mathbf{y}$. Вектор, наиболее близкий в пространстве весов признаков к $\mathbf{y}_0$, в смысле наименьших квадратов:

$$\widetilde{\mathbf{w}} = X^+\mathbf{y}_0, \text{ где}$$

$$X^+ = (X^TX)^{-1}X^T.$$

Задача 2. Требуется найти такую монотонную последовательность $w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_n$, что она лучше всего приближает вектор $\widetilde{\mathbf{w}}$ в смысле среднего квадрата ошибки:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{w}} = \arg\min\limits_{w\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\widetilde{w}_j - w_j)^2, \\ w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_n. \end{cases}$$

Такую задачу можно решить, например, методом, описанным в [8]. Однако, чтобы получить согласованные экспертные оценки, введем в модель гиперпараметр. С его помощью мы сможем варьировать нашу «степень доверия» от экспертных оценок весов признаков (то есть, монотонной последовательности $w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_n$) к экспертным оценкам интегральных индикаторов (вектору $\widehat{\mathbf{w}}$).

Задача 3. Требуется найти такой вектор $\widehat{\mathbf{w}}$, что:

$$\widehat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (\widetilde{w}_j - w_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} (w_j - w_{j+1})_+ \right). \qquad (2)$$

Решение задачи монотонной интерполяции с гиперпараметром.

Для решения этой задачи воспользуемся идеями, описанными в [10].

Утверждение 1. *Пусть, для некоторого λ_0, совпадают две соседние координаты оценки: $\widehat{w}_j(\lambda_0) = \widehat{w}_{j+1}(\lambda_0)$. Тогда $\widehat{w}_j(\lambda) = \widehat{w}_{j+1}(\lambda)$ для всех $\lambda > \lambda_0$.*

Пусть при некотором λ совпадают некоторые соседние координаты вектора $\mathbf{w}$, и всего таких множеств совпадающих координат — K_λ. Обозначим за $A_1, ..., A_{K_\lambda}$ сами эти множества. Заметим, что $A_1 \cup ... \cup A_{K_\lambda} = \{1, ..., n\}$. Тогда функция потерь для задачи (2) перепишется в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K_\lambda}\sum_{l\in A_k}(\widetilde{w}_l - w_{A_k})^2 + \lambda\sum_{k=1}^{K_\lambda}(w_{A_k} - w_{A_{k+1}})_+.$$

Продифференцируем ее по всем w_{A_k}:

$$-\sum_{l\in A_k}\widetilde{w}_l + |A_k|\widehat{w}_{A_k}(\lambda) + \lambda(s_k - s_{k-1}) = 0$$

$$\text{для } k = 1, ..., K_\lambda,$$

где $s_k = 1$ при $\widehat{w}_{A_k}(\lambda) - \widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) > 0$, и $s_k = 0$ иначе.

Пусть все $A_1, ..., A_{K_\lambda}$ не изменяются с увеличением λ. Тогда:

$$\frac{d\widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{s_{k-1} - s_k}{|A_k|}.$$

Когда λ увеличивается, множества A_k меняются. Однако, согласно утв. 1, они могут только объединяться, то есть, величины компонент $\widehat{w}_{A_k}(\lambda)$ внутри каждого множества A_k остаются равными. Можно посчитать величину следующего λ, при котором будут объединяться множества A_k, A_{k+1}. Обозначим это λ как $t_{k,k+1}$.

Утверждение 2. *Множества A_k и A_{k+1} будут объединяться при*

$$t_{k,k+1} = \frac{\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda,$$

для всех $k = 1, .., K_\lambda - 1$, где

$$D_k = \frac{d\widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda}.$$

Доказательство. Поскольку производные

$$\frac{d\widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda}$$

не являются функциями λ, можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\widehat{w}_{A_k}(\lambda) = \lambda D_k + C_k,\\ \widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda,) = \lambda D_{k+1} + C_{k+1}.\end{cases}$$

В точке $t_{k,k+1}$ происходит объединение множеств A_k и A_{k+1}, то есть:

$$\widehat{w}_{A_k}(t_{k,k+1}) = \widehat{w}_{A_{k+1}}(t_{k,k+1}) \ \Rightarrow \ t_{k,k+1} = \frac{C_{k+1} - C_k}{D_k - D_{k+1}} =$$

$$= \frac{(\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \lambda D_{k+1}) - (\widehat{w}_{A_k}(\lambda) - \lambda D_k)}{D_k - D_{k+1}} =$$

$$= \frac{\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda.$$

Таким образом, на каждой итерации нужно вычислять величину

$$\widehat{\lambda} = \min_{k: t_{k,k+1} > \lambda} t_{k,k+1}$$

и объединять множества $A_{k'}$ и $A_{k'+1}$, где

$$k' = \arg \min_{k: t_{k,k+1} > \lambda} t_{k,k+1}. \ (3)$$

Алгоритм решения.

Вход: $\lambda = 0, K_\lambda = n, A_k = \{k\}, \widehat{w}_{A_k}(\lambda) = \widetilde{w}_k$.
1: **Повторять:**
2: $D_k := \frac{s_{k-1} - s_k}{|A_k|}$
3: $t_{k,k+1} := \frac{\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda$
4: $\widehat{\lambda} := \min\limits_{k: t_{k,k+1} > \lambda} t_{k,k+1}$
5: $\widehat{w}_{A_k}(\lambda) := \widehat{w}_{A_k}(\lambda) + D_k(\widehat{\lambda} - \lambda)$
6: объединить $A_{k'}$ и $A_{k'+1}$, см. (3)
7: $\lambda := \widehat{\lambda}$
8: **пока** существует k: $t_{k,k+1} \geqslant \lambda$

Результат работы алгоритма монотонной интерполяции.

Проиллюстрируем работу алгоритма решения задачи монотонной интерполяции на модельной выборке, порожденной с помощью функции $y_i = x_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 20)$. Ломаная линия на рис. 1 — восстановленная зависимость, для различных значений регуляризатора λ.

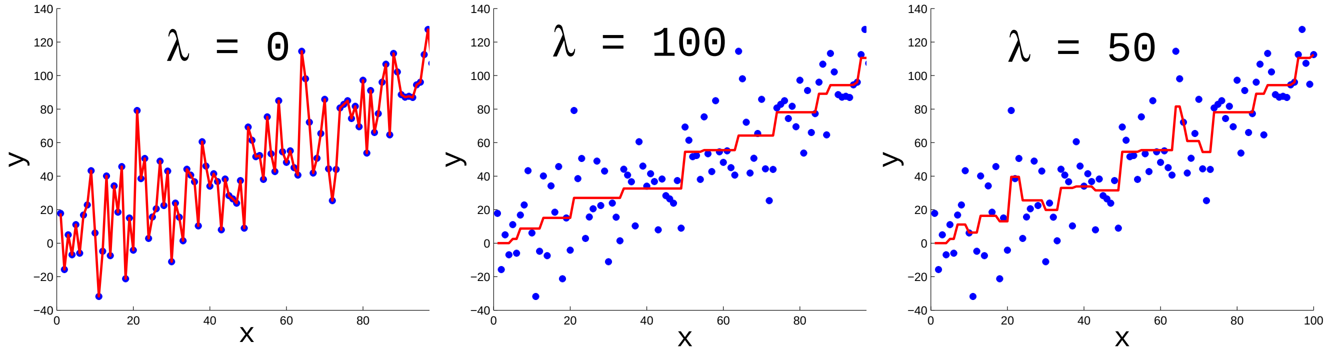

Рис. 1. Монотонная интерполяция

Видно, что при $\lambda = 100$ и более функция, восстанавливающая зависимость, монотонная. При $\lambda = 0$, наоборот, никакой монотонной коррекции нет.

Вычислительный эксперимент.

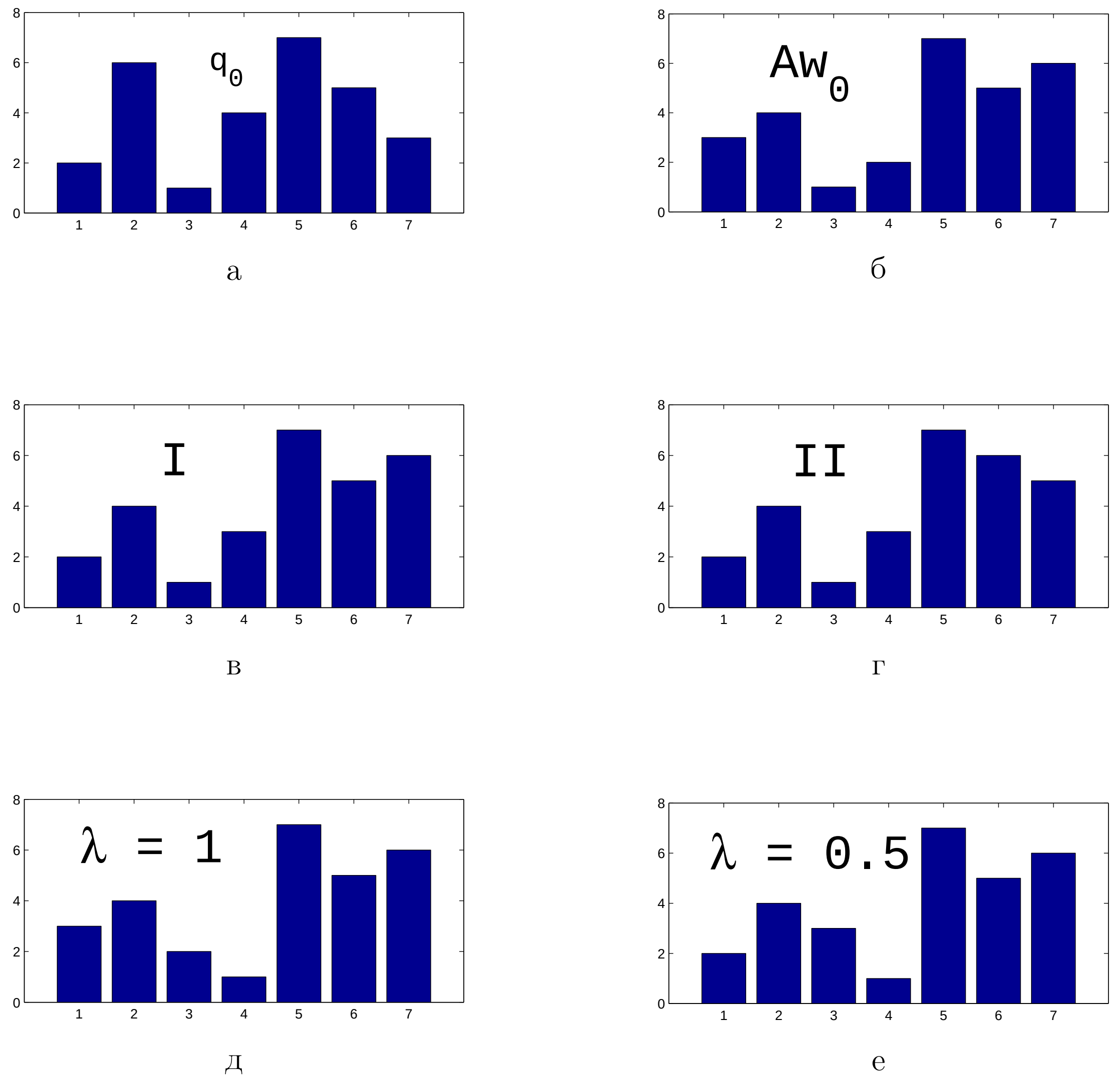

Рис. 2. Интегральные индикаторы электростанций, вычисленные различными алгоритмами. «а»: начальный интегральный индикатор $\mathbf{q}_0$. «б»: интегральный индикатор, построенный по $\mathbf{w}_0$. «в»: интегральный индикатор, построенный алгоритмом минимизации расстояния между векторами в конусах. «г»: интегральный индикатор, построенный алгоритмом максимизации корреляции между векторами в конусах. «д»: интегральный индикатор, построенный алгоритмом монотонной интерполяции со значением гиперпараметра $\lambda = 1$. «е»: интегральный индикатор, построенный алгоритмом монотонной интерполяции со значением гиперпараметра $\lambda = 0.5$.

Был проведен вычислительный эксперимент уточнения экспертных оценок экологического воздействия на окружающую среду хорватских электростанций. Для этого были собраны следующие данные: матрица «объекты-признаки», где объекты — это семь

N	Power Plant	Available net capacity (MW)	Electricity (GWh)	Heat (TJ)	SO_2 (t)	NO_x (t)	Particles (t)
1	Plomin 1 TPP	98	452	0	1950	1378	140
2	Plomin 2 TPP	192	1576	0	581	1434	60
3	Rijeka TPP	303	825	0	6392	1240	171
4	Sisak TPP	396	741	0	3592	1049	255
5	TE-TO Zagreb CHP	337	1374	481	2829	705	25
6	EL-TO Zagreb CHP	90	333	332	1259	900	19
7	TE-TO Osijek CHP	42	114	115	1062	320	35
	Optimal value	max	max	max	min	min	min

Рис. 3. Электростанции

электростанций, описываемых 11-ю признаками, экспертные оценки весов показателей и интегральных индикаторов электростанций. На рис. 3 показана часть этих данных: семь электростанций и шесть из 11 признаков.

Несмотря на то, что экспертные оценки не являются согласованными (рис. 2а и рис. 2б), по некоторым объектам можно выявить схожесть предпочтений. Например, и на рис. 1а, и на рис. 1б лучшим является объект 5; объект 6 всегда лучше объектов 1, 3 и 4; объект 1 всегда хуже объектов 2, 5, 6 и 7. Предложенные алгоритмы работают корректно, в том смысле, что они оставляют согласованными предпочтения экспертов: на всех рис. 2в, рис. 2г, рис. 2д , рис. 2е выполнены вышеописанные утверждения.

Из рис. 2в и рис. 2г видно, что алгоритмы поиска ближайших векторов в конусах сработали похожим образом.

На рис. 2д изображены интегральные индикаторы для $\lambda = 1$, то есть, когда в задаче 2 мы отдаем предпочтение экспертным оценкам весов. Видно, что интегральные индикаторы на рис. 2д похожи, соответственно, на интегральные индикаторы на рис. 2б.

Заключение.

В работе рассматривалась задача получения согласованных оценок качества объектов и важности показателей. В результате выполнения работы обобщены ранее полученные результаты по согласованию экспертных оценок с использованием конусов. Предложено использовать алгоритм монотонной интерполяции для уточнения экспертных оценок. Исследованы свойства этого алгоритма при различном значении гиперпараметра, введенного в модель. Проведен вычислительный эксперимент уточнения экспертных оценок качества хорватских электростанций, составлен рейтинг электростанций, основанный на оценках экспертов и измеряемых данных.

Литература

[1] *В. В. Подиновский* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями. // Автоматика и телемеханика, стр. 118–127, 1976.

[2] *О. И. Ларичев, Е. М. Мошкович.* Качественные методы принятия решений. // Физматлит, 1996.

[3] *D. W. Marquardt.* Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation,and nonlinear estimation. // Technometrics, page 605–607, 1996.

[4] *I. T. Jolliffe.* Principal Component Analysis. // Springer, 2002.

[5] *A. J. Isenmann.* Modern multivariate statistical techniques. // Springer, 2008.

[6] *В. В. Стрижов.* Уточнение экспертных оценок с помощью измеряемых данных. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов., page 59–64, 2006.

[7] *V. Strijov, G. Granić et al.* Integral indicator of ecological impact of the Croatian thermal power plants. // *Energy* doi:10.1016/j.energy.2011.04.30. — 2011.

[8] *J. de Leeuw, K. Hornik, P. Mair* Isotone Optimization in R: Pool-Adjacent-Violators Algorithm (PAVA) and Active Set Methods. // Jounal of Statistic Software. — 2009. — Vol. 29.

[9] *R. E. Barlow, H. D. Brunk* The Isotonic Regression Problem and Its Dual. // Journal of American Statistical Association. — 1972. — Vol. 67, — Pp. 140-147.

[10] *R. J. Tibshirani, H. Hoefling, R. Tibshirani* Nearly-Isotonic Regression. // Technometrics. — 2011. — Vol. 53.

[11] *R. Kos, Z. Krisic, T. Tarnik* Hrvatska elektoprivreda and the environment 2005-2006. // Zagreb, Hrvatska Elektroprivreda. — 2008.