Топологическая фильтрация для распознавания и анализа симметрии цифровых изображений*

***А. Н. Каркищенко*[1]*, В. Б. Мнухин*[2]**
[1]karkishalex@gmail.com; [2]mnukhin.valeriy@mail.ru
Южный федеральный университет, Россия, г. Ростов-на-Дону 344006,
ул. Большая Садовая, 105/42

Ряд методов обработки и анализа цифровых изображений в частотной области основан на формальном переносе свойств непрерывного преобразования Фурье на дискретный случай. Это зачастую приводит к искажениям, называемым *алиасинг* или *наложение*.

В работе алиасинг рассматривается как следствие различной топологии частотных областей непрерывного и дискретного преобразований Фурье: сферы в непрерывном случае и тора в дискретном. Устанавливается связь между непрерывным и дискретным преобразованиями Фурье, и на ее основе предлагается метод *топологической фильтрации*, уменьшающий эффекты алиасинга в задачах совмещения и анализа симметрии цифровых изображений в частотной области.

Ключевые слова: спектр; цифровое изображение; вращение; обвертка тора; алиасинг

Topological filtration for digital images recognition and symmetry analysis*

A. N. Karkishchenko, V. B. Mnukhin
Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don 344006, Russia

A number of methods for digital images processing (say, the Fourier–Mellin transform method) is based on the formal adaptation of the continuous Fourier transform properties to the discrete case. As a result, aliasing errors occur, and it is highly important to control it.
In the paper, aliasing is considered as a topological effect caused by different properties of frequency domains of continuous and discrete Fourier transforms. Indeed, the continuous frequency domain may be considered as a sphere, but it is a torus in the discrete case.
A *torus winding operator* that transforms functions in a plane (or a sphere) to functions on a torus is defined. It is shown that the discrete spectrum of an image is the discretization of the winding of a torus by the continuous Fourier transform of the piecewise-constant approximation of the image. As a corollary, discrete Fourier transform (DFT) is expanded into a series, whose initial term is the continuous Fourier transform discretization, and next terms are the higher harmonic effects. The results are applied to the problem of finding the "optimal" rotations in discrete frequency and spatial domains.
Another application of the stated results is a technique to reduce systematic errors in frequency domain-based methods for digital images recognition, registration, and symmetry analysis. It is based on the continuous Fourier transform of the piecewise-constant approximation of an image instead of DFT. For this, an algorithm for *topological filtration* of the spectrum of an digital image is presented. The complexity of the algorithm is the same as for fast Fourier transform.

Keywords: spectrum; rotation; digital image; torus winding; aliasing

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 13-07-00327-а и № 13-07-13112-офи_м_РЖД.

Введение

В настоящее время при обработке и анализе цифровых изображений широко используются [1, 2, 3] подходы, основанные на представлении изображений в частотной области с помощью двумерного дискретного преобразования Фурье (ДПФ). При этом ряд методов (например, преобразование Фурье-Меллина [4, 5, 6, 7], вращение изображений в частотной области [8, 9, 10, 11], распознавание симметрии [12, 13, 14, 15, 16]), основан на переносе свойств непрерывного преобразования Фурье на ДПФ в предположении, что возникающие погрешности убывают с увеличением размеров обрабатываемых изображений. Действительно, хорошо известно [17, с. 551], что при выполнении условий теоремы Котельникова ДПФ можно с высокой точностью считать дискретизацией непрерывного преобразования Фурье. Однако предположение о финитности спектра, естественное в классической теории одномерных сигналов, перестает быть таковым для цифровых изображений. В самом деле, такие изображения, финитные по определению, обязаны иметь неограниченный спектр в силу «соотношения неопределенностей». Это делает влияние высокочастотных гармоник существенным; вызываемые ими искажения обрабатываемых изображений объединяются понятием *алиасинг* (*aliasing*) или *наложение*, см. [17, с. 555], [18, с. 152–153] и др.

В качестве примера такого наложения рассмотрим рис. 1. Он визуализирует в псевдоцветах логарифмы модулей ДПФ изображения прямоугольника и результатов его вращений на углы в $60°$ и $\operatorname{arctg} 2 \approx 63,4°$. Как известно [17, с. 540], в непрерывном случае вращению изображения отвечает вращение его спектра. При отсутствии наложения спектров, то же самое было бы справедливым и в дискретном случае. Однако, как показывает рис. 1, дискретные спектры не только поворачиваются при вращении оригинала, но и содержат характерный «шум», вызванный влиянием гармоник с частотами, превышающими частоту Найквиста. Отметим качественное изменение вида спектра при изменении угла поворота всего на $3,4°$.

Таким образом, дискретизация непрерывного преобразования Фурье является только начальным приближением к ДПФ, что ставит вопрос о точной зависимости между этими преобразованиями. Целью данной работы является установление и интерпретация такой зависимости в двумерном случае, а также разработка на ее основе алгоритма уменьшения систематических ошибок, вызываемых наложением спектров, в различных задачах распознавания цифровых изображений и анализа их симметрии.

Мы покажем, что различное поведение непрерывного и дискретного преобразований Фурье при вращениях связано с различиями в топологии их частотных областей: частотную область непрерывного двумерного преобразования Фурье можно считать сферой, в то время как в дискретном случае она является тором [2, с. 59], [19, гл. 19]. В работе вводится оператор *обвертки тора*, отображающий функции на плоскости в функции на торе. Доказывается, что ДПФ цифрового изображения является дискретизацией обвертки тора непрерывным Фурье-образом кусочно-постоянной аппроксимации этого изображения. Это позволяет представить ДПФ суммой ряда, начальный член которого совпадает с дискретизацией непрерывного Фурье-образа, а последующие члены интерпретируются как влияние высокочастотных гармоник.

На основе полученных результатов вводятся «оптимальные» операторы вращения в дискретных частотной и пространственной областях, и проводится детальный анализ рис. 1. Предлагается алгоритм *топологической фильтрации* дискретного спектра, позволяющий повысить достоверность распознавания и совмещения цифровых изображений, а также анализа их симметрии в частотной области.

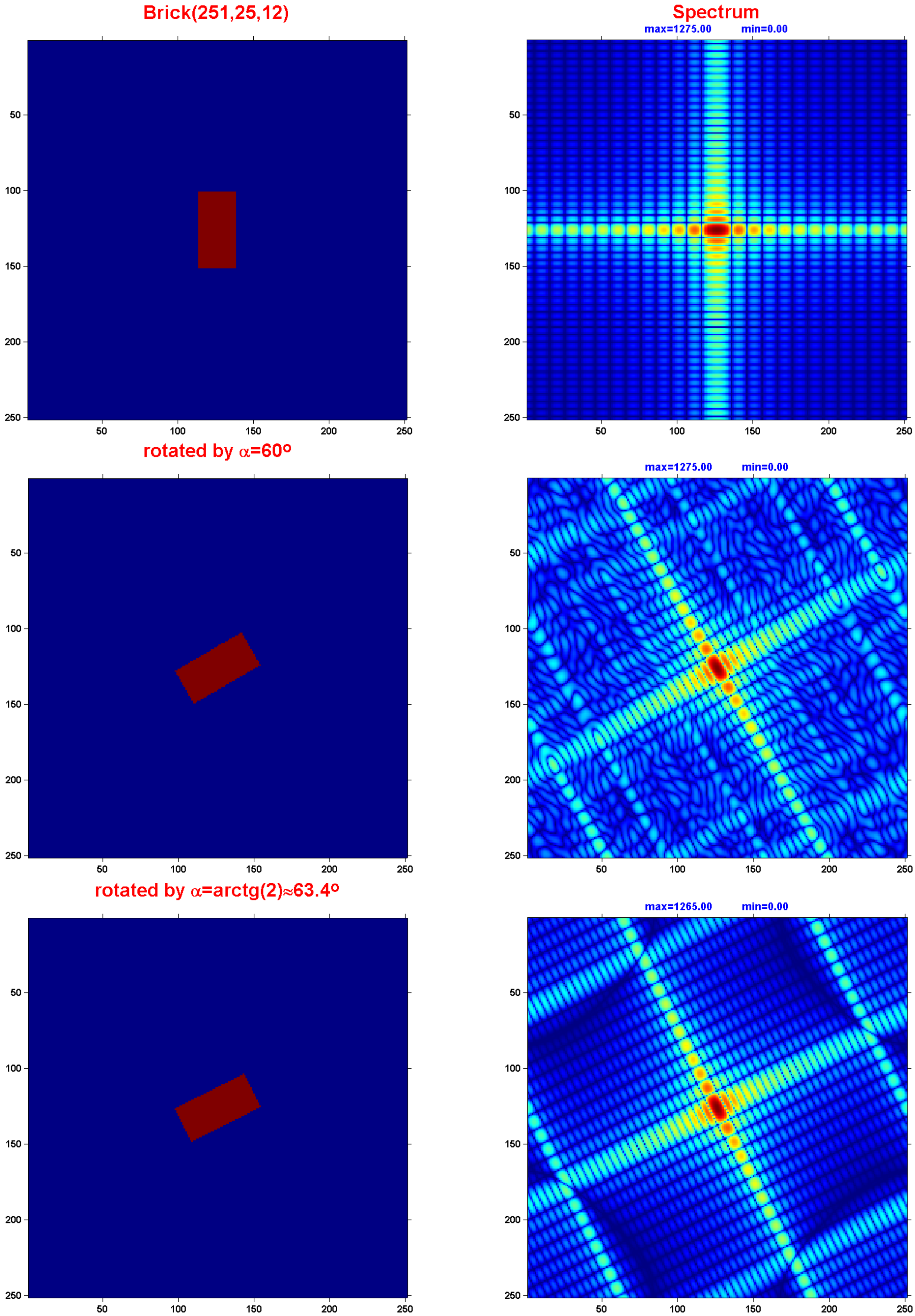


Рис. 1. Поведение спектра при вращениях изображения

Таблица 1. Используемые обозначения

Обозначение	непрерывный случай	дискретный случай
функция	f	f
точка пространственной области	(x, y)	(p, q)
точка частотной области	(u, v)	(s, t)
преобразование Фурье	$F(u, v) = \mathscr{F}\big[f(x, y)\big]$	$\mathsf{F}(s, t) = \mathcal{F}\big[\mathsf{f}(p, q)\big]$
континуализация/дискретизация	$f(x, y) = \mathcal{C}\big[\mathsf{f}(p, q)\big]$	$\mathsf{f}(p, q) = \mathcal{D}_N\big[f(x, y)\big]$
вращение	$\mathscr{R}_\alpha$	$\mathcal{R}_\alpha, \quad \widehat{\mathcal{R}}_\alpha, \quad \mathcal{R}^D_\alpha$

Все изображения, рассматриваемые в работе, считаются полутоновыми; случай цветных изображений может быть рассмотрен аналогично. Отметим, что результаты работы могут быть перенесены на размерности, большие 2. В то же время в одномерном случае они малоинтересны.

Условимся об обозначениях, собрав их в таблицу, где дискретные и непрерывные аналоги одних и тех же понятий различаются шрифтом. Заметим, что далее под преобразованиями Фурье всегда подразумеваются 2D-преобразования.

Дискретизация и континуализация

В этом разделе уточняются необходимые понятия и вводятся обозначения. Новых результатов раздел не содержит.

Будем считать, что на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ введена декартова система координат. Условимся под (непрерывной) *функцией* понимать кусочно-непрерывную комплекснозначную функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, определенную всюду на $\mathbb{R}^2$ и абсолютно интегрируемую там. (Заметим, что эти требования позволяет рассматривать с единых позиций как Фурье-оригиналы $f(x, y)$ в пространственной области xOy, так и Фурье-образы $F(u, v)$ в частотной области uOv.)

Функция f *финитна* [20, с. 23], если она обращается в нуль всюду вне некоторой замкнутой области $\operatorname{supp}(f) \subset \mathbb{R}^2$ конечного диаметра, называемой *носителем* функции. Финитную функцию, принимающую только неотрицательные действительные значения, называют *непрерывным полутоновым изображением.*

Дискретной функцией $\mathsf{f}(p, q)$ назовем комплекснозначную функцию $\mathsf{f}(p, q) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$, определенную всюду на решетке $\mathbb{Z}^2$. Дискретная функция *финитна*, если ее носитель $\operatorname{supp}(\mathsf{f}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \big\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ \mathsf{f}(p, q) \neq 0\big\}$ конечен.

Под *дискретной функцией размера* $N \times N$ будем понимать дискретную финитную функцию f вместе с целым *нечетным* числом $N = 2M + 1$ таким, что

$$\operatorname{supp}(\mathsf{f}) \subseteq [-M, M]^2 \subset \mathbb{Z}^2 \ .$$

Наконец, если такая дискретная функция принимает только неотрицательные действительные значения, назовем ее *цифровым* $N \times N$*-изображением.*

Замечание 1. Таким образом, все рассматриваемые далее изображения будут считаться квадратными нечетного размера. Эти ограничения, не влияющие на общность подхода, сделаны для удобства изложения. В частности, нечетность размера цифрового изображения позволяет говорить о его *центре* в точке $(0, 0)$, что упрощает рассуждения.

Как очевидно, дискретная функция f размера $N \times N$ полностью определяется матрицей своих значений $\mathsf{f}(p,q) = f_{pq}$, где $-M \leqslant p,q \leqslant M$, а $M = (N-1)/2$. Поэтому будем иногда говорить о таких функциях как о матрицах $\mathsf{f} = \big(f_{pq}\big)$. Верно и обратное: матрицы можно считать дискретными финитными функциями.

Рассмотрим связи между непрерывными и дискретными функциями. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, не обязательно финитная. Зафиксируем целое $N > 0$ и сопоставим f дискретную функцию $\mathsf{f} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ следующим очевидным образом:

$$\mathsf{f}(p,q) = f\left(\frac{p}{N}, \frac{q}{N}\right), \qquad p,q \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Назовем f *дискретизацией* функции f с шагом $\Delta = 1/N$, см. [21, с. 41]. Легко заметить, что определяемый тем самым *оператор дискретизации* $\mathcal{D}_N\big[f(x,y)\big] = \mathsf{f}(p,q)$ является линейным, и, более того, $\mathcal{D}_N[f \cdot g] = \mathsf{f} \cdot \mathsf{g}$. Как очевидно, если f финитна или является изображением, то теми же свойствами обладает и $\mathcal{D}_N[f]$. Разумеется, восстановить f по ее дискретизации, вообще говоря, нельзя, так что оператор $\mathcal{D}_N$ не является обратимым. Условимся вместо $\mathcal{D}_1$ писать далее просто $\mathcal{D}$.

Введем теперь *оператор континуализации* $\mathcal{C}$, отображающий пространство дискретных функций в пространство кусочно-постоянных функций. Для этого каждой паре целых чисел $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ сопоставим на плоскости $\mathbb{R}^2$ область

$$I_{pq} = \left(p - \frac{1}{2}\,,\ p + \frac{1}{2}\right] \times \left(q - \frac{1}{2}\,,\ q + \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}^2\ . \tag{2}$$

Понятно, что I_{pq} — единичный квадрат без «левой» и «нижней» сторон, геометрический центр которого находится в точке (p,q). Совокупность всех областей I_{pq} образует «замощение» плоскости $\mathbb{R}^2$, причем каждая точка плоскости принадлежит ровно одной области.

Рассмотрим элементарные изображения-«пикселы»

$$e_{pq}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y) \in I_{pq}, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin I_{pq}. \end{cases} \tag{3}$$

(Таким образом, масштаб считается выбранным так, что пикселы имеют размер 1×1.) Назовем *континуализацией* дискретной функции $\mathsf{f}(p,q)$ кусочно-постоянную функцию

$$\mathcal{C}[\mathsf{f}] = f(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f_{pq} e_{pq}(x,y), \tag{4}$$

см. [1, с. 124], [2, с. 51]. Ее можно рассматривать как тривиальную аппроксимацию f полиномами нулевого порядка. Пример континуализации изображения показан на рис. 2.

Оператор $\mathcal{C}$ является линейным; более того, $\mathcal{C}[\mathsf{f} \cdot \mathsf{g}] = f \cdot g$. Заметим, что $\mathcal{D}\mathcal{C}[\mathsf{f}] = \mathsf{f}$, но $\mathcal{C}\mathcal{D}[f] \neq f$. Другими словами, $\mathcal{D}$ является левым обратным к $\mathcal{C}$.

Обвертка тора

Введем оператор, отображающий (некоторые) функции на плоскости в функции на торе. Для этого функции $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ сопоставим двойной ряд

$$f(x,y) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x-k, y-l)\ , \tag{5}$$

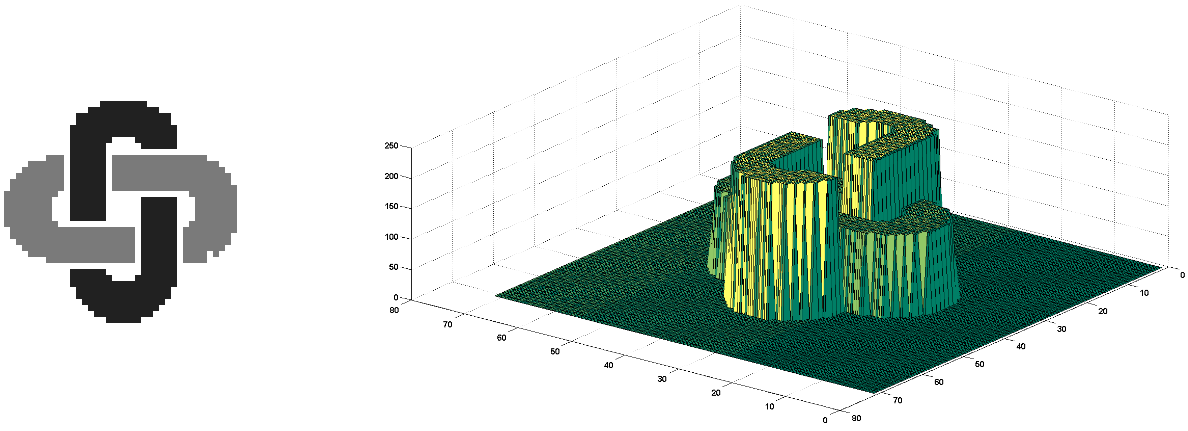


Рис. 2. Пример континуализации изображения

понимая его сходимость в смысле главного значения, т. е. как существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} f(x-k, y-l)\ .$$

Если этот предел существует для всех $x, y \in \mathbb{R}$, обозначим соответствующую сумму ряда (5) как

$$W(x,y) = \mathrm{VP} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x-k, y-l)\ . \tag{6}$$

Таким образом, $W(x,y)$ есть сумма функций, получающихся из f всевозможными сдвигами вдоль осей Ox и Oy на целое число единиц. Следующие свойства $W(x,y)$ легко проверяются.

Утверждение 1. *Если $W(x,y)$ существует, то*

$$W(x\pm 1, y) = W(x, y\pm 1) = W(x,y),$$
$$W(x-0.5, y) = W(x+0.5, y), \quad W(x, y-0.5) = W(x, y+0.5).$$

Другими словами, функция $W(x,y)$ является двоякопериодической, причем ее значения на противоположных сторонах любого единичного квадрата со сторонами, параллельными осям координат, совпадают.

Вспоминая (2), договоримся обозначать единичный квадрат с центром в начале координат как $\mathbb{I} = (-0.5, 0.5]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $\mathbb{T}$ — тор, получающийся из $\mathbb{I}$ «склеиванием» противоположных сторон. Тогда $W(x,y) = \mathscr{W}[f]$ можно считать функцией на торе $\mathbb{T}$.

Определение 1. *Если ряд (5) сходится в смысле главного значения, то его сумму $W(x,y)$ назовем $\mathscr{W}$-преобразованием*[1] *функции f и будем говорить, что эта функция обвертывает тор. Оператор $\mathscr{W}[f] = W(x,y)$ назовем оператором обвертки тора, область $\mathbb{I} = I_{00}$ — главным листом обвертки, а остальные области I_{pq} — ее листами.*

Как известно [22, с. 90], плоскость $\mathbb{R}^2$, дополненная бесконечно-удаленной точкой, отождествляется со сферой. Поэтому можно считать, что оператор $\mathscr{W}$ отображает функции на сфере в функции на торе, причем значение функции $W(x,y) = \mathscr{W}[f]$ в некоторой

[1] От англ. *winding* — обвертка.

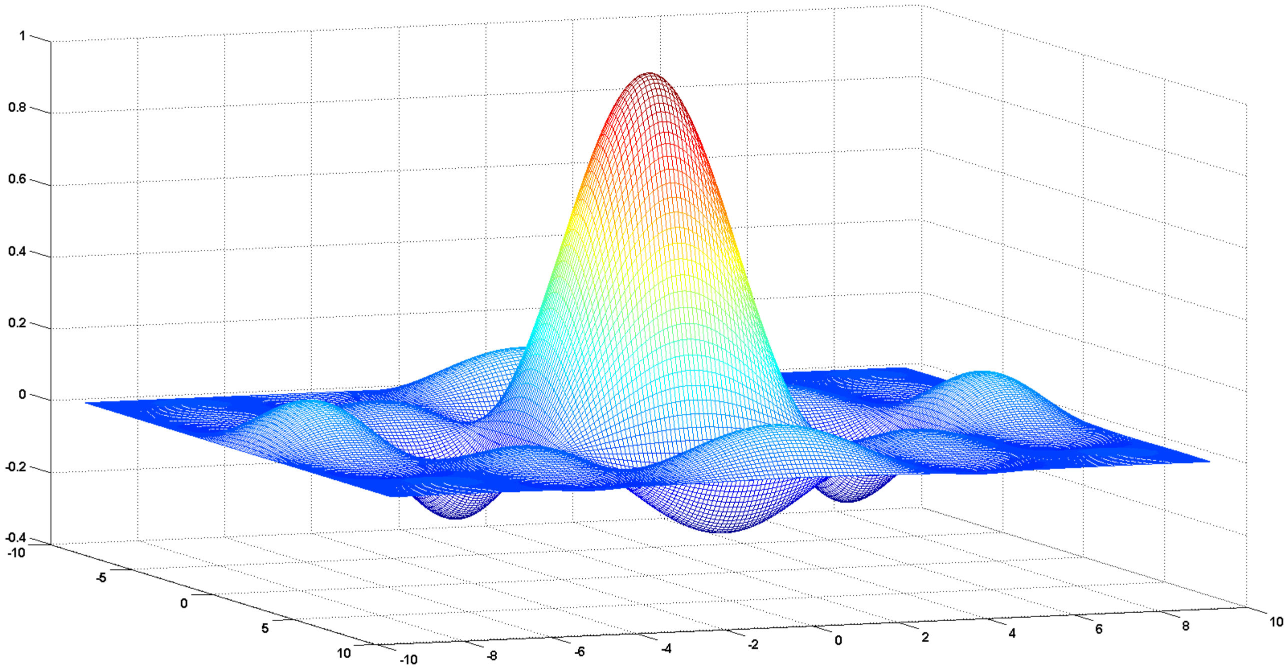


Рис. 3. Функция $\operatorname{sinc}(x, y)$

точке тора равно сумме значений функции $f(x, y)$ в соответствующих точках всех листов обвертки. (Заметим, что полагая область определения W сферой Римана, приходим к двоякопериодической функции комплексного переменного $W(z)$, не являющейся, вообще говоря, эллиптической [23, с. 24].) Следующий результат несложно доказать.

Утверждение 2. *$\mathscr{W}$-преобразование обладает следующими свойствами.*

1) *Каждая финитная функция обвертывает тор.*
2) *Допустим, что $\mathscr{W}$-преобразование функции g существует, а функция f является периодической по каждому аргументу с периодом 1. Тогда $\mathscr{W}[f \cdot g]$ существует, и*
$$\mathscr{W}[f \cdot g] = f \cdot \mathscr{W}[g]\,. \tag{7}$$
В частности, если $\mathscr{W}[h]$ существует, то $\mathscr{W}\big[g \cdot \mathscr{W}[h]\big] = \mathscr{W}[g] \cdot \mathscr{W}[h]$.
3) *Пусть $f(x, y) = g(x)h(y)$. Тогда, если $W(x, y)$ существует, то $W(x, y) = G(x)H(y)$, где*
$$G(x) = \mathrm{VP}\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x-k), \qquad H(y) = \mathrm{VP}\sum_{l\in\mathbb{Z}} h(y-l)\,. \tag{8}$$

Покажем, что существуют функции, обвертывающие тор, но не являющиеся финитными. Для этого напомним [21, с. 28] определение функции sinc:
$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{если } x = 0, \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,, & \text{если } x \text{ — отличное от нуля действительное число.} \end{cases}$$

Рассмотрим ее 2D-аналог $\operatorname{sinc}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \operatorname{sinc}(x) \cdot \operatorname{sinc}(y)$, см. рис. 3.

Лемма 1. *Функция $\operatorname{sinc}(x, y)$ обвертывает тор, причем ее $\mathscr{W}$-преобразование является единичной функцией:*
$$\text{если} \quad W(x, y) = \mathscr{W}\big[\operatorname{sinc}(x, y)\big], \quad \text{то} \quad W(x, y) = 1 \quad \text{для всех } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{9}$$

Доказательство. В соответствии с (8), $W(x,y) = G(x)H(y)$, где

$$G(x) = \mathrm{VP}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sinc}(x-k), \qquad H(y) = G(y). \tag{10}$$

Найдем $G(x)$, начав со случая целочисленного $x = m \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\operatorname{sinc}(x) = 0$ для всех ненулевых целых x, единственное отличное от нуля слагаемое в сумме (10) будет равно 1 и соответствовать $k = m$. Тем самым $G(m) = 1$ для всех $m \in \mathbb{Z}$.

Пусть теперь $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Тогда (10) принимает следующий вид:

$$G(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{VP}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x - \pi k)}{x-k} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,\mathrm{VP}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x-k}\ .$$

Как известно, ([24], с. 50, формула 1.422.3),

$$\frac{1}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x^2-k^2}\ ,$$

или, что равносильно,

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{2x}{x^2-k^2}\ .$$

Остается заметить, что

$$\mathrm{VP}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x-k} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{x-k} + \frac{1}{x+k}\right] = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{2x}{x^2-k^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\ .$$

Таким образом, $G(x) = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, что доказывает лемму. ∎

Полученный результат обобщается в следующем разделе, где доказывается, что *Фурье-образ любой финитной функции обертывает тор*. Заметим, что целью работы не является описание класса всех функций, обертывающих тор.

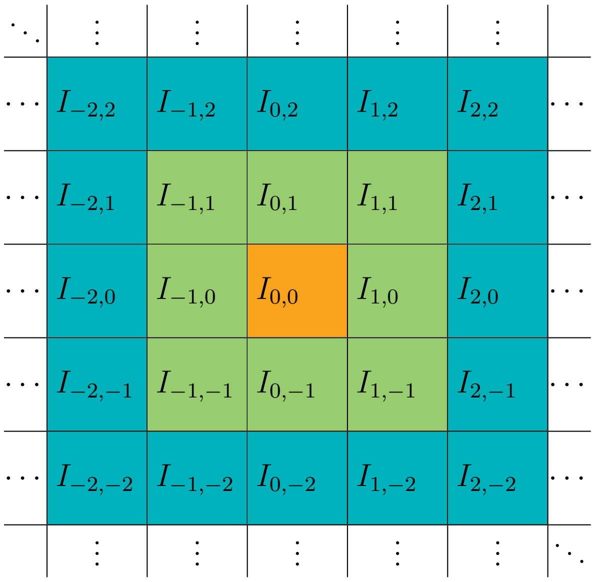
Функцию $W(x,y)$ удобно представлять следующим образом: рассмотрим частичные суммы S_n ряда (6),

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n} f(x-k, y-l)\ , \qquad (n = 0,1,2,\ldots),$$

и пусть $W_0 = S_0 = f$, а $W_n = S_n - S_{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Как очевидно,

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + \ldots\ . \tag{11}$$

Здесь W_1 является суммой значений функции на $8 = 3^2 - 1$ листах «первого слоя», непосредственно примыкающих к главному листу $\mathbb{I} = I_{0,0}$ обвертки тора. Аналогично, W_2 есть сумма значений f на $16 = 5^2 - 3^2$ листах «второго слоя», и т.д. Эти слои выделены цветов на следующем рисунке. В общем случае, k-й слой при $k \geqslant 1$ включает в себя $8k$ листов. Поэтому условимся говорить, что выражение (11) представляет $\mathscr{W}$-преобразование *рядом по слоям обвертки тора.*



Удобно ограничивать $W(x, y)$ на главный лист $\mathbb{I}$, поэтому условимся о следующем обозначении:

$$\widetilde{\mathscr{W}}[f] = \widetilde{W}(x, y) = \begin{cases} W(x, y), & \text{если } (x, y) \in \mathbb{I}, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin \mathbb{I}, \end{cases} \tag{12}$$

продолжая его естественным образом на формулу (11):

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}_0 + \widetilde{W}_1 + \widetilde{W}_2 + \widetilde{W}_3 + \ldots\ . \tag{13}$$

Такое представление обмотки тора используется в следующем разделе.

Дискретное преобразование Фурье как обмотка тора

Докажем основной результат данной работы: *дискретное преобразование Фурье некоторой функции является дискретизацией обвертки тора непрерывным Фурье-образом континуализации этой функции.*

Условимся рассматривать непрерывное преобразование Фурье в форме

$$\mathscr{F}[f] = F(u, v) = \iint\limits_{(x,y)\in \operatorname{supp} f} f(x, y)\, e^{-2\pi i(xu+yv)} dx\, dy\ ;$$

обратное к нему преобразование имеет вид

$$\mathscr{F}^{-1}[F] = f(x, y) = \iint\limits_{(u,v)\in \mathbb{R}^2} F(u, v)\, e^{2\pi i(xu+yv)} du\, dv\ . \tag{14}$$

Заметим, что Фурье-образы $F = \mathscr{F}[f]$ заведомо существуют для финитных функций f, но, как правило, не являются финитными в частотной области uOv.

Следующий результат хорошо известен [18, с. 86] и легко проверяется непосредственным интегрированием.

Лемма 2. *Пусть $e_{pq}(x,y)$ — кусочно-постоянная функция, определяемая формулой (3) и являющаяся цифровым изображением отдельного пиксела. Пусть $E_{pq}(u,v)$ — ее непрерывный Фурье-образ. Тогда*

$$E_{pq}(u,v) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathscr{F}\big[e_{pq}(x,y)\big] = \operatorname{sinc}(u,v)\cdot e^{-2\pi i(up+vq)} \,. \tag{15}$$

Воспользуемся им, чтобы показать, что Фурье-образ континуализации любой дискретной финитной функции обвертывает тор.

Утверждение 3. *Пусть $\mathsf{f} = \big(f_{pq}\big)$ — дискретная $N\times N$-функция. Тогда $\mathscr{W}$-преобразование непрерывного Фурье-образа ее континуализации $f(x,y) = \mathcal{C}[\mathsf{f}]$ существует и совпадает с функцией*

$$G(u,v) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathscr{W}\mathscr{F}[f] = \sum_{p=-M}^{M}\sum_{q=-M}^{M} f_{pq}\, e^{-2\pi i(up+vq)}, \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ M=(N-1)/2\,. \tag{16}$$

Доказательство. Согласно определению (4) континуализации,

$$f(x,y) = \mathcal{C}[\mathsf{f}] = \sum_{p=-M}^{M}\sum_{q=-M}^{M} f_{pq}e_{pq}(x,y)\,.$$

Следовательно, в силу (15),

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f] &= \sum_{p=-M}^{M}\sum_{q=-M}^{M} f_{pq}E_{pq}(u,v)\\ &= \operatorname{sinc}(u,v)\sum_{p=-M}^{M}\sum_{q=-M}^{M} f_{pq}\, e^{-2\pi i(up+vq)} = \operatorname{sinc}(u,v)\cdot G(u,v)\,. \end{aligned}\tag{17}$$

Поскольку p и q — целые, легко заметить, что $G(u,v) = G(u+1,v) = G(u,v+1)$. Таким образом, функция $G(u,v)$ является периодической по каждой переменной с периодом 1.

Применим к обеим частям формулы (17) оператор $\mathscr{W}$ обвертки тора:

$$\mathscr{W}\mathscr{F}[f] = \mathscr{W}\big[\operatorname{sinc}(u,v)\cdot G(u,v)\big]\,.$$

Так как $G(u,v)$ периодична, из (7) вытекает, что обвертка тора $\mathscr{W}\mathscr{F}[f]$ существует, причем, согласно выражению (9) леммы 1,

$$\mathscr{W}\mathscr{F}[f] = G(u,v)\cdot\mathscr{W}\big[\operatorname{sinc}(u,v)\big] = G(u,v),$$

что завершает доказательство. ■

Установим связь между непрерывным $\mathscr{F}$ и дискретным $\mathcal{F}$ преобразованиями Фурье.

Пусть, как и ранее, $N = 2M+1$, так что $M = (N-1)/2$. Вспомним [19], что ДПФ дискретной $N\times N$-функции $\mathsf{f} = \big(f_{pq}\big)$ определяется как

$$\mathcal{F}[\mathsf{f}] = \mathsf{F}(s,t) = \sum_{p=-M}^{M}\sum_{q=-M}^{M} f_{pq}\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(sp+tq)}, \qquad \text{где } (s,t)\in\mathbb{Z}^2,\ -M\leqslant s,\ t\leqslant M.$$

Дискретную функцию F можно как и f, считать, $N \times N$-матрицей $\mathsf{F} = \big(F_{st}\big)$, индексы которой изменяются от $-M$ до M.

Из определения (16) функции $G(u,v)$ немедленно следует, что

$$\mathsf{F}(s,t) = G\left(\frac{s}{N},\ \frac{t}{N}\right)\ , \qquad -M \leqslant s,\, t \leqslant M.$$

Вспоминая (1), видим, что $\mathcal{F}[\mathsf{f}]$ является дискретизацией (с шагом $\Delta = 1/N$) функции $G(u,v)$, ограниченной на $\mathbb{I}$ подобно тому, как это сделано в (12). Для такого ограничения достаточно заменить в (16) оператор $\mathscr{W}$ на $\widetilde{\mathscr{W}}$. Поэтому

$$\mathsf{F}(s,t) = \mathcal{D}_N \widetilde{\mathscr{W}} \mathscr{F}\left[f\right]\ .$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Дискретное преобразование Фурье $(N \times N)$-функции f совпадает с дискретизацией обвертки тора непрерывным Фурье-образом континуализации этой функции,*

$$\mathcal{F}[\mathsf{f}] = \mathcal{D}_N \widetilde{\mathscr{W}} \mathscr{F} \mathcal{C}[\mathsf{f}]\ . \tag{18}$$

Другими словами, если $\mathsf{F}(s,t) = \mathcal{F}[\mathsf{f}]$, *а* $F(u,v) = \mathscr{F}\mathcal{C}[\mathsf{f}]$, *то*

$$\mathsf{F}(s,t) = \mathrm{VP} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{s}{N} - k\,,\ \frac{t}{N} - l\right)\ , \qquad -M \leqslant s,\, t \leqslant M. \tag{19}$$

Для практических применений ряд (19) удобно записывать в иной форме.

Следствие 1. *Пусть $\mathsf{F} = \mathcal{F}[\mathsf{f}]$ — дискретное преобразование Фурье функции f. Тогда*

$$\mathsf{F} = \mathsf{F}_0 + \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2 + \cdots\ , \qquad \text{где} \quad \mathsf{F}_n \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathcal{D}_N \widetilde{W}_n \mathscr{F}\mathcal{C}[\mathsf{f}]. \tag{20}$$

Другими словами, если $\mathsf{F}(s,t) = \mathcal{F}[\mathsf{f}]$, *а* $F(u,v) = \mathscr{F}\mathcal{C}[\mathsf{f}]$, *то*

$$\mathsf{F}_n(s,t) = \sum_{(k,l)\in L_n} F\left(\frac{s}{N} - k\,,\ \frac{t}{N} - l\right)\ , \qquad -M \leqslant s,\, t \leqslant M,$$

где

$$L_n = \Big\{\ (k,l) \in [-n,n]^2 \subset \mathbb{Z}^2\ :\ \text{либо } k = \pm n, \text{ либо } l = \pm n\ \Big\}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что, согласно (13),

$$\widetilde{\mathscr{W}} \mathscr{F}\mathcal{C}[\mathsf{f}] = \widetilde{W}_0[F] + \widetilde{W}_1[F] + \widetilde{W}_2[F] + \cdots\ , \qquad \text{где} \quad F = \mathscr{F}\mathcal{C}[\mathsf{f}],$$

после чего воспользоваться линейностью оператора континуализации. Назовем (20) *разложением дискретного преобразования Фурье в ряд по слоям обвертки тора.*

Предположим, что спектр функции $f = \mathcal{C}[\mathsf{f}]$ финитен и локализован на главном листе $\mathbb{I}$, т.е., $\operatorname{supp}(F) \subset \mathbb{I}$. (Заметим, что это в точности условие теоремы Котельникова-Найквиста-Уиттекера-Шеннона [25] в ее 2D-варианте.) Тогда в (20) все члены, кроме F_0, равны нулю. Поскольку F_0 является дискретизацией ограничения F на $\mathbb{I}$, немедленно получаем

Следствие 2. *Если функция* f *удовлетворяет условиям теоремы Котельникова, то*

$$\mathcal{F}[\mathsf{f}] = \mathcal{D}_N \mathscr{F}[f]$$

Другими словами, в этом случае ДПФ можно считать дискретизацией непрерывного Фурье-преобразования.

В заключение отметим, что поскольку в правой части выражения $\mathcal{F}[\mathsf{f}] = \mathcal{D}_N \widetilde{\mathscr{W}} \mathscr{F} \mathcal{C}[\mathsf{f}]$ только $\mathscr{F}$ является обратимым, это выражение нельзя использовать для обращения ДПФ. Учитывая (14) и повторяя доказательство теоремы 1, получаем

$$\mathsf{f} = \mathcal{F}^{-1}[\mathsf{F}] = \mathcal{D}_N \widetilde{\mathscr{W}} \mathscr{F}^{-1} \mathcal{C}[\mathsf{F}]\ .$$

где F считается дискретной функцией размера $N \times N$.

Оптимальное вращение цифрового изображения

В этом разделе на основе предыдущих результатах обсуждается проблема корректного введения вращения на дискретной плоскости. Анализируется рис. 1, демонстрирующий поведение спектра цифрового изображения при его вращениях, и показывается, что отмеченные ранее во введении эффекты являются следствиями формулы (18).

Отметим, что поведение спектра цифрового изображения при вращениях неоднократно обсуждалось ([26, с. 342], [17, с. 570], [27, с. 345], и др.). Вместе с тем нам представляется, что эффектам алиасинга при этом уделялось недостаточное внимание. Достаточно типичным, на наш взгляд, является высказывание [17, с. 540 и с. 568]:

> *Rotation of an image in the xy plane causes the same rotation in the transformed image (Theorem 15.7), and this is easily visible in the DFT plane, though it cannot normally be expressed there with absolute precision (see Figure 15.4, Chapter 15). ... The cause of imprecision is that in general certain transforms such as rotation cannot be expressed exactly in integer coordinates.*

Искажения изображения, возникающие при вращении его спектра, называются в работе [28] *краевыми эффектами* (*edge effects*). Заметим, что предлагаемое там объяснение причин этих эффектов представляется нам спорным.

Начнем с уточения понятие вращения. Как известно [19] непрерывное преобразование Фурье $\mathscr{F}$ коммутирует с оператором $\mathscr{R}_\alpha$ *непрерывного вращения*:

$$\mathscr{R}_\alpha \mathscr{F} = \mathscr{F} \mathscr{R}_\alpha, \tag{21}$$

где

$$\mathscr{R}_\alpha\big[f(x,y)\big] = f\big(x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ \ x\sin\alpha + y\cos\alpha\big)\ . \tag{22}$$

Таким образом, в непрерывном случае один и тот же оператор $\mathscr{R}_\alpha$ задает вращения и в пространственной, и в частотной областях.

В то же время вращение на дискретной плоскости может быть введено различными способами. В частности, при обработке изображений в пространственной области, как правило [3, с. 390], используют дискретные вращения, так или иначе связанные с целочисленной аппроксимацией формулы (22), например,

$$\mathcal{R}^D_\alpha\big[\mathsf{f}(p,q)\big] = f\big([p\cos\alpha - q\sin\alpha],\ \ [p\sin\alpha + q\cos\alpha]\big)\ , \qquad (p,q) \in [-M, M]^2\ . \tag{23}$$

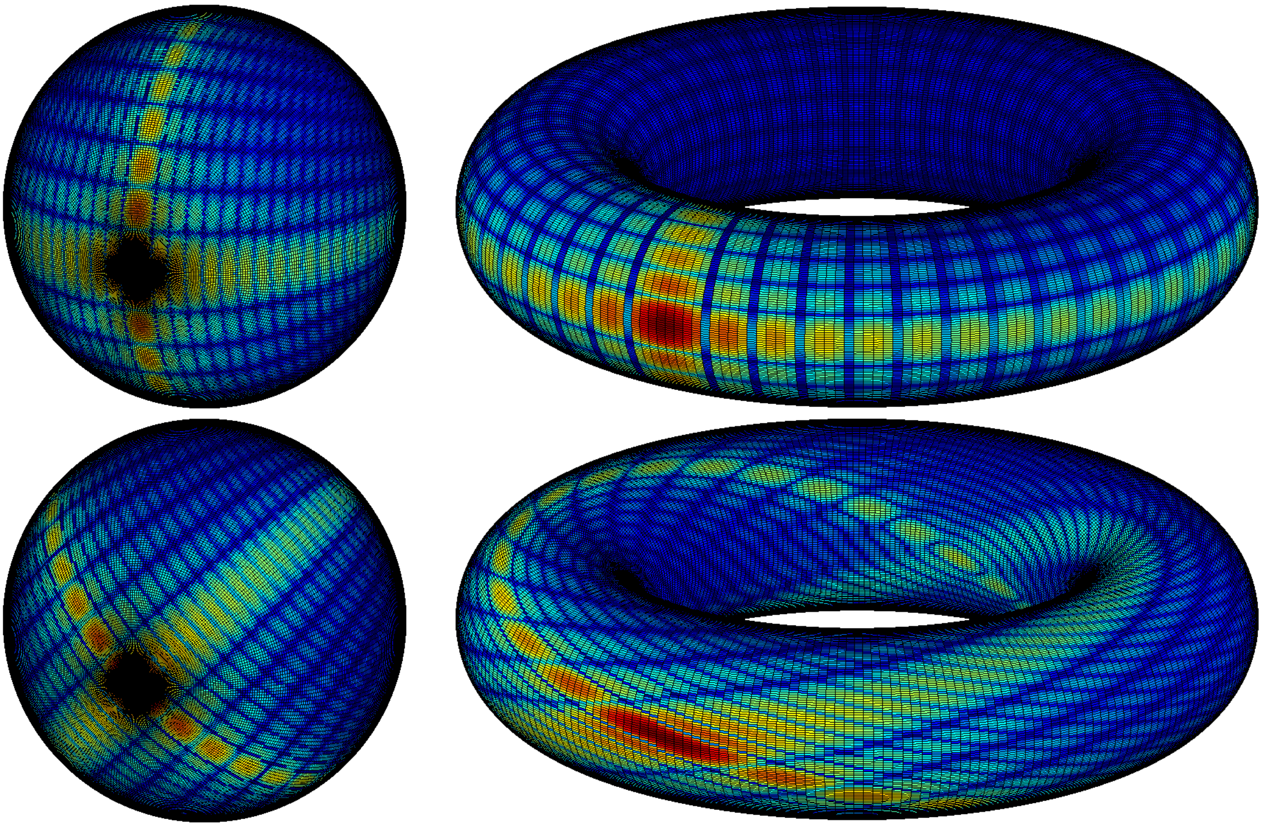


Рис. 4. Вращение на 45° Фурье-образов на сфере и торе

где $f(x, y) = \mathcal{C}[\mathsf{f}(p, q)]$, а $[a]$ означает округление действительного числа a до ближайшего целого. Как нетрудно заметить, $\mathcal{R}_\alpha^D = \mathcal{D}\mathscr{R}_\alpha\mathcal{C}$. Известен и возможен ряд модификаций формулы (23). К сожалению, формальный перенос «традиционного» вращения $\mathcal{R}^D$, равно как и его модификаций, в частотную область ведет к систематическим ошибкам,

$$\mathcal{R}_\alpha^D \mathcal{F} \neq \mathcal{F} \mathcal{R}_\alpha^D. \tag{24}$$

Таким образом, введение дискретного вращения может рассматриваться как некорректная задача, решение которой следует понимать в смысле оптимальности по некоторому критерию. При этом «оптимальное вращение» должно, по аналогии с (21), коммутировать с дискретным преобразованием Фурье.

Воспользуемся связью между непрерывным и дискретным преобразованиями Фурье для подобного оптимального введения дискретного аналога оператора вращения. При этом будем считать, что вращения в частотной и пространственной областях задаются соответственно операторами $\widehat{\mathcal{R}}_\alpha$ и $\mathcal{R}_\alpha$, не обязательно совпадающими, но удовлетворяющими соотношению

$$\widehat{\mathcal{R}}_\alpha \mathcal{F} = \mathcal{F} \mathcal{R}_\alpha\ .$$

Заметим, что тем самым $\mathcal{R}_\alpha$ и $\widehat{\mathcal{R}}_\alpha$ взаимно определяют друг друга: если $\mathsf{F} = \mathcal{F}[\mathsf{f}]$, то

$$\mathcal{R}_\alpha[\mathsf{f}] = \mathcal{F}^{-1}\widehat{\mathcal{R}}_\alpha[\mathsf{F}]\ , \qquad \widehat{\mathcal{R}}_\alpha[\mathsf{F}] = \mathcal{F}\mathcal{R}_\alpha[\mathsf{f}]\ .$$

Таким образом, дискретное вращение в частотной области задает вращение в пространственной, и наоборот.

Из теоремы 1 немедленно вытекает естественное определение дискретного вращение в частотной области. Действительно, вспоминая формулы (18) и (21), введем $\widehat{\mathcal{R}}_\alpha$ как

$$\widehat{\mathcal{R}}_\alpha[\mathsf{F}] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathcal{D}_N \widetilde{\mathscr{W}} \mathscr{F} \mathscr{R}_\alpha \mathcal{C}[\mathsf{f}] = \mathcal{D}_N \widetilde{\mathscr{W}} \mathscr{R}_\alpha \mathscr{F} \mathcal{C}[\mathsf{f}] \ . \tag{25}$$

Другими словами, *чтобы повернуть дискретный спектр функции* f *на угол* α*, повернем с помощью* (22) *на угол* α *непрерывный спектр континуализации этой функции, а затем повернутым спектром обернем тор.*

Введенный таким образом оператор $\widehat{\mathcal{R}}_\alpha$ порождает «оптимальное» дискретное вращение $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{F}^{-1}\widehat{\mathcal{R}}_\alpha\mathcal{F}$ в пространственной области. Можно показать, что $\mathcal{R}^D_\alpha$ и $\mathcal{R}_\alpha$ практически совпадают при достаточно больших размерах обрабатываемого изображения.

Причины различия между (21) и (24) становятся очевидными, если вспомнить, что в непрерывном случае и пространственную, и частотную области можно считать сферами, на которых вращение вдоль оси, соединяющей 0 с бесконечно-удаленной точкой ∞, определяется естественным образом, см. левую часть рис. 4.

В то же время дискретная частотная область является оберткой тора непрерывной плоскостью. Для ее вращения следует сначала повернуть плоскость, а затем обернуть тор повернутой плоскостью, см. (25) и правую часть рис. 4.

В качестве примера рассмотрим рис. 5. Его левая верхняя часть визуализирует в псевдоцветах функцию $\lg(1+|F|)$, где F — повернутый (с помощью $\mathcal{R}^D \approx \mathcal{R}$) на $60°$ *непрерывный* Фурье-образ изображения прямоугольника. Функция показана на фрагменте частотной плоскости uOv, включающем в себя главный лист $\mathbb{I}$ (в центре) и 8 листов, образующих в совокупности первый слой обвертки тора $\mathbb{T}$. Далее функция F будет записана аналитически и проанализирована детально.

В правом верхнем углу рисунка показана визуализация ограничения F на $\mathbb{I}$, т. е. начального члена F_0 разложения (20) спектра по слоям обвертки тора. Чтобы получить F_1, необходимо просуммировать F в соответствующих точках всех 8 листов первого слоя, см. левую нижнюю часть рис. 5. Аналогично, F_2 является суммой F по 16 листам второго слоя, и т.д.

Для нахождения всего *дискретного* Фурье-образа F изображения повернутого прямоугольника необходимо просуммировать ряд,

$$\mathsf{F} = \mathsf{F}_0 + \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2 + \cdots \ .$$

Визуализация F показана в правой средней части рис. 1; хорошо различимы вклады, вносимые слагаемыми F_0, F_1, F_2, а остальной «шум» вызван членами бóльших порядков.

Правая нижняя часть рис. 1 демонстрирует спектр изображения прямоугольника, повернутого на угол $\alpha = \operatorname{arctg}(2) \approx 63,4°$. Уменьшение «шума» связано с тем, что теперь, в отличие от предыдущего случая, тангенс угла поворота является рациональным числом. Действительно, энергия спектра повернутого прямоугольника сконцентрирована на частотной плоскости uOv вдоль прямых $u = kv$ и $u = -v/k$, где $0 \neq k = \operatorname{tg}\alpha$. Если $k \in \mathbb{Q}$, то эти прямые замкнутся после обвертки тора плоскостью uOv. При $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ образы прямых $u = kv$ и $u = -v/k$ не замыкаются, а проходят на произвольно малом расстоянии от каждой точки тора, порождая его *иррациональную обмотку*, см. рис. 6.

Замечание 2. Обратим внимание на то, что образы прямых $u = kv$ и $u = -v/k$ при $k \in \mathbb{Q}$ проходят бесконечное число раз через образ точки $(0,0)$ на торе. Поскольку энергия спектра сосредоточена вдоль этих прямых, возникающее самодействие, казалось бы, должно нарушать равенство $F(0,0) = \mathsf{F}(0,0)$. Однако анализ доказательств утверждения 3 и теоремы 1 показывает, что равенство остается справедливым.

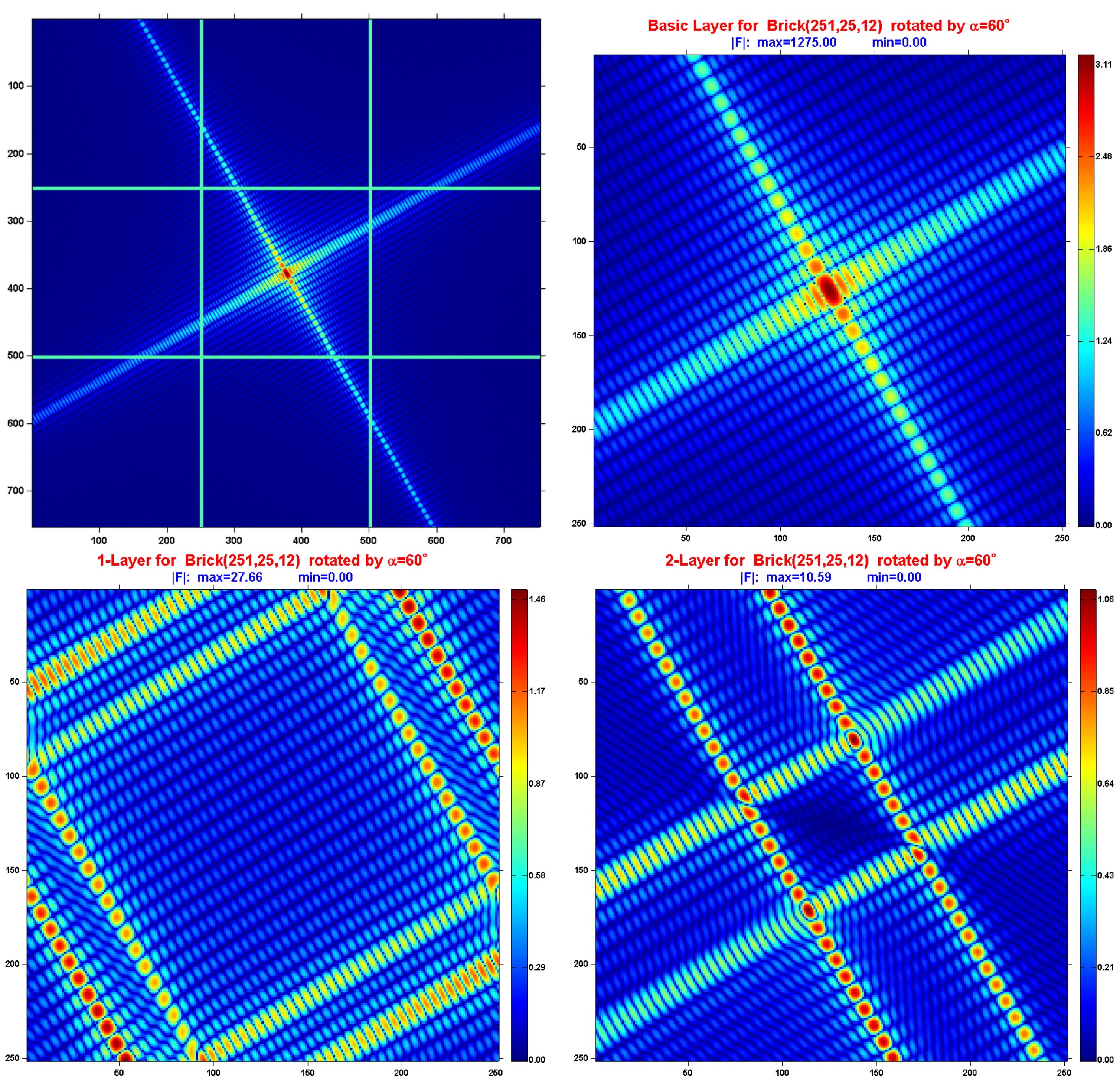


Рис. 5. Непрерывный спектр повернутого прямоугольника и слои F_0, F_1, F_2 обвертки тора

Перейдем к численному анализу примера. Пусть f — цифровое $N \times N$-изображение прямоугольника из $m \times n$ пикселей. Целые m и n условимся считать нечетными, а прямоугольник — центрированным и ориентированным вдоль координатных осей дискретной пространственной области pOq. Непрерывный Фурье-образ континуализации $f = \mathcal{C}[\mathsf{f}]$ имеет вид [18, с. 86]

$$\mathscr{F}[f] = F(u, v) = mn \cdot \operatorname{sinc}(mu, nv),$$

где фазовая компонента отсутствует ввиду центральной симметричности изображения. Поворачивая F (или, что равносильно, f) на угол α, получим

$$\mathscr{R}_\alpha[F] = mn \cdot \operatorname{sinc}\big(\, mU(u, v),\ nV(u, v)\,\big), \qquad \text{где}$$
$$U(u, v) = u\cos\alpha - v\sin\alpha\,, \quad V(u, v) = u\sin\alpha + v\cos\alpha\,.$$

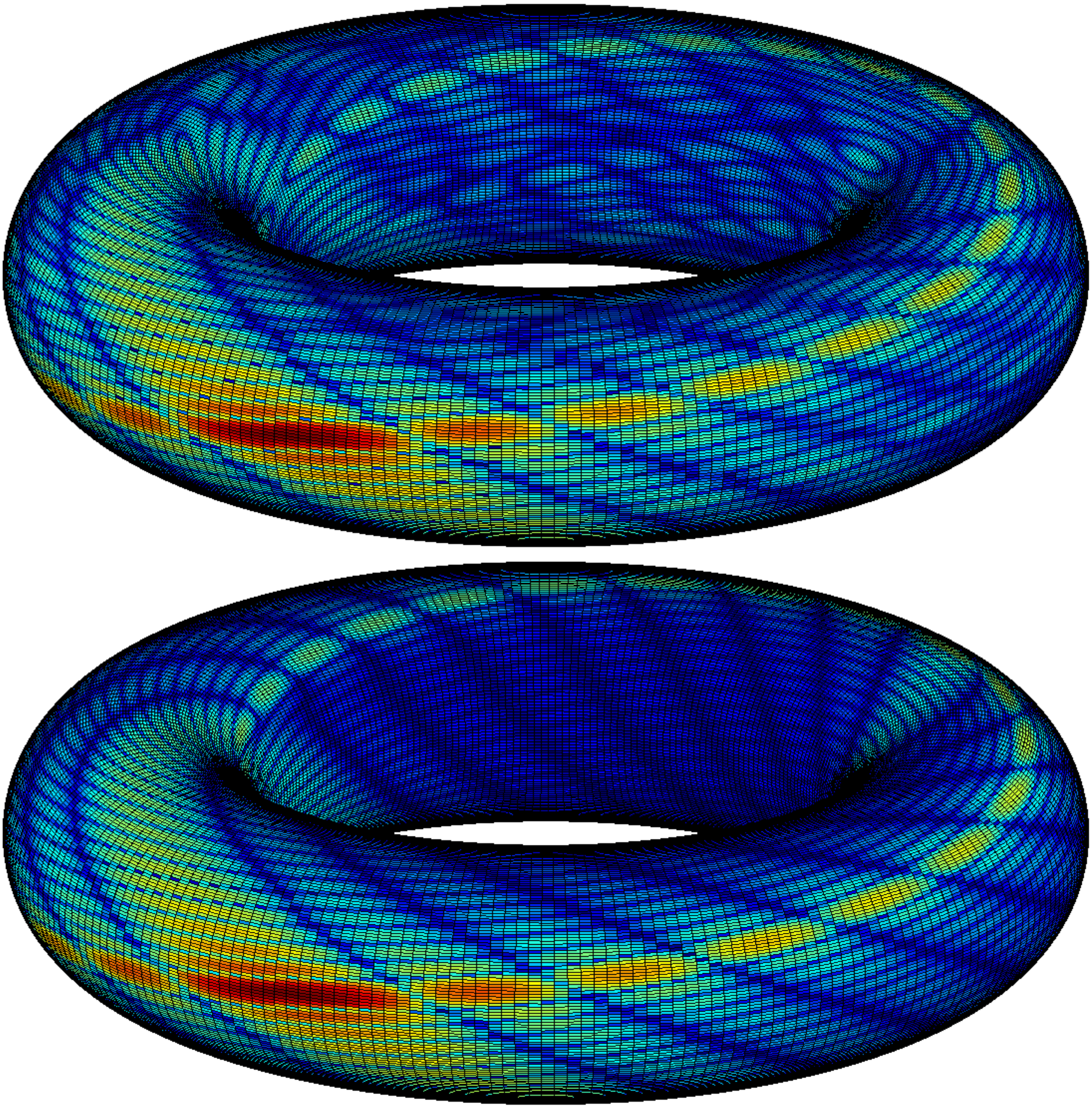


Рис. 6. Иррациональная ($\alpha = 60°$) и рациональная ($\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63,4°$) обвертки тора

В левой верхней части рис. 5 показана (при $N = 251$, т. е. с шагом $\Delta = 1/251$) функция

$$\lg\Big(1 + \big|mn \cdot \operatorname{sinc}\big(\, mU(u, v),\; nV(u, v)\,\big)\big|\Big), \qquad (-1.5 \leqslant u, v \leqslant 1.5),$$

при $\alpha = 60°$, $m = 25$ и $n = 51$, что соответствует размерам прямогольника на рис. 1. Вертикальные и горизонтальные зеленые линии разграничивают отдельные листы обвертки тора. Таким образом, начальный член разложения (20) ДПФ в ряд по слоям обвертки тора равен

$$\mathsf{F}_0(p, q) = mn \cdot \operatorname{sinc}\left(\, mU\left(\frac{p}{N}, \frac{q}{N}\right),\;\; nV\left(\frac{p}{N}, \frac{q}{N}\,\right)\right), \quad \text{где } N = 251 \text{ и } -125 \leqslant p, q \leqslant 125\ .$$

Следующий член $\mathsf{F}_1(p,q)$ равен

$$\mathsf{F}_1(p,q) = mn \sum_{(k,l)\in L_1} \operatorname{sinc}\left(mU\Big(\frac{p}{N} - k, \frac{q}{N} - l \Big),\ \ nV\Big(\frac{p}{N} - k, \frac{q}{N} - l \Big) \right),$$

где $L_1 = \big\{ (-1,-1),\ (-1,0),\ (-1,1),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,0),\ (1,-1),\ (0,-1) \big\}$, и т. д. Логарифмы модулей функций $\mathsf{F}_0(p,q)$, $\mathsf{F}_1(p,q)$, $\mathsf{F}_2(p,q)$ показаны на рис. 5.

Заметим, что подобные аналитические выражения для слоев обвертки тора могут, несмотря на громоздкость, быть записаны для *любого* цифрового изображения.

Топологическая фильтрация

В этом разделе обсуждаются некоторые практические применения полученных выше результатов. Как известно, ряд методов обработки и анализа цифровых изображений в частотной области основан на переносе свойств непрерывного преобразования Фурье на дискретный случай. Такими свойствами обычно являются неизменность модуля Фурье-образа при сдвигах изображения, и то, что вращению непрерывного изображения отвечает вращение его Фурье-образа. Как следствие, модуль Фурье-образа в полярной системе координат инвариантен при сдвигах исходного изображения, а его вращения приводят к циклическим сдвигам вдоль оси полярных углов. Поскольку циклические сдвиги легко распознаются (например, повторным Фурье-преобразованием, либо вычислением корреляционной функции, либо статистическим анализом), это позволяет строить дескрипторы, инвариантные относительно сдвигов и вращений. В частности, так проводится анализ симметрии изображений в [13, 14, 15]. (Заметим, что, пользуясь полярно-логарифмическими координатами, как в методе Фурье–Меллина [6], можно, в некоторой степени, добиться и инвариантности дескрипторов при масштабировании.)

Вместе с тем, как было показано выше, ключевой элемент предыдущих рассуждений — свойство (21) вращения спектра — в дискретном случае выполняется только приближенно, а его использование в этом случае ведет к систематическим ошибкам. Действительно, рассмотрим рис. 7. Он показывает в полярных координатах модули спектров изображений $m \times n$-прямоугольника, повернутого на углы $\alpha = \operatorname{arctg}(2) \approx 63.4^\circ$ и $\beta = -60^\circ$ в непрерывном случае (нижняя часть) и дискретном случае (верхняя часть), при $N = 503$, $m = 161$ и $n = 9$. Легко заметить, что алиасинг приводит к различиям в дискретных спектрах, зависящим от углов поворота, что уменьшает достоверность распознавания соответствия этих спектров изображению одного и того же объекта. Для уменьшения эффектов алиасинга применяется высокочастотная фильтрация. Однако эти эффекты могут проявляться и вблизи точки $F(0,0)$, что делает обычную высокочастотную фильтрацию в таких случаях малоэффективной.

Нежелательные эффекты алиасинга могут быть устранены использованием вместо обычного дискретного спектра изображения — начального члена F_0 разложения F по слоям обвертки тора, как это показано в нижней части рис. 7. Таким образом, возникает задача *топологической фильтрации* дискретного спектра, состоящая в эффективном построения $\mathsf{F}_0[\mathsf{f}]$ по исходному цифровому изображению f.

Один из возможных алгоритмов топологической фильтрации заключается в следующем. Пусть Z_k — матрица размера $k \times k$, все элементы которой равны единице. Рассматривая цифровое изображение f как $N \times N$-матрицу $\mathsf{f} = \big(f_{pq}\big)$, построим кронекерово произведение $\mathsf{f} \otimes Z_k = \big(f_{pq} Z_k\big)$. Полученная $kN \times kN$-матрица соответствует цифровому

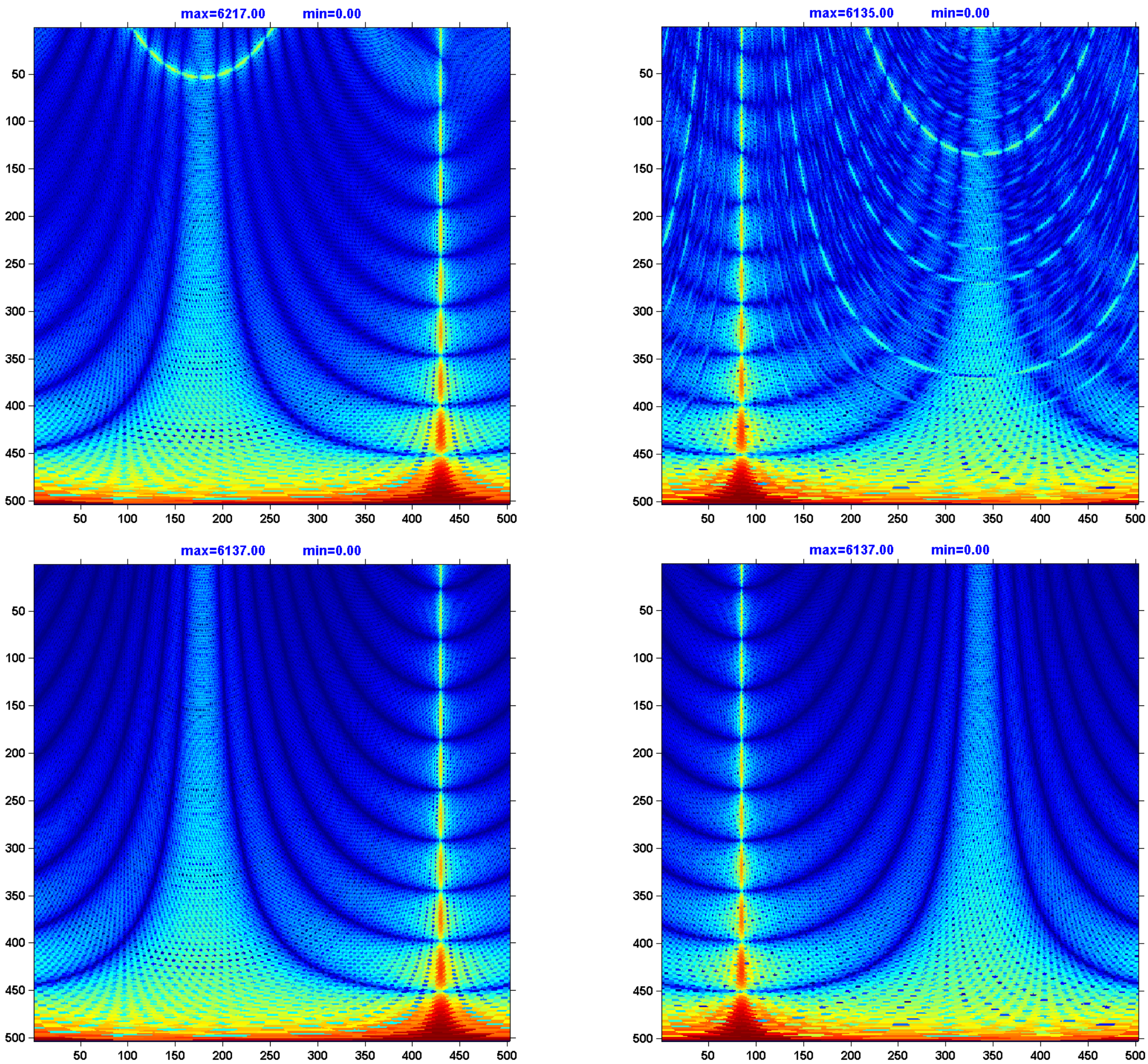


Рис. 7. Дискретный и непрерывный спектры в полярных координатах

изображению, получаемому $k \times k$-подразбиением каждого пиксела в f; другими словами, $\mathsf{f} \otimes Z_k$ — это увеличенное в k раз исходное изображение f. Пусть

$$Q = \frac{1}{k^2} \cdot \mathcal{F}\bigl[\mathsf{f} \otimes Z_k\bigr], \qquad \text{где} \quad k = 2l + 1 > 1 \text{ — нечетное целое.}$$

Считая Q матрицей размера $kN \times kN$, разобьем ее на блоки Q_{ij} размера $N \times N$ следующим образом:

$$Q = \bigl(Q_{ij}\bigr), \quad \text{где} \quad -l \leqslant i, j \leqslant l\,.$$

Разность между центральным блоком Q_{00} и суммой всех остальных блоков обозначим как

$$T_l \overset{\text{def}}{=\!=} 2Q_{00} - \sum_{i=-l}^{l} \sum_{j=-l}^{l} Q_{ij}\,.$$

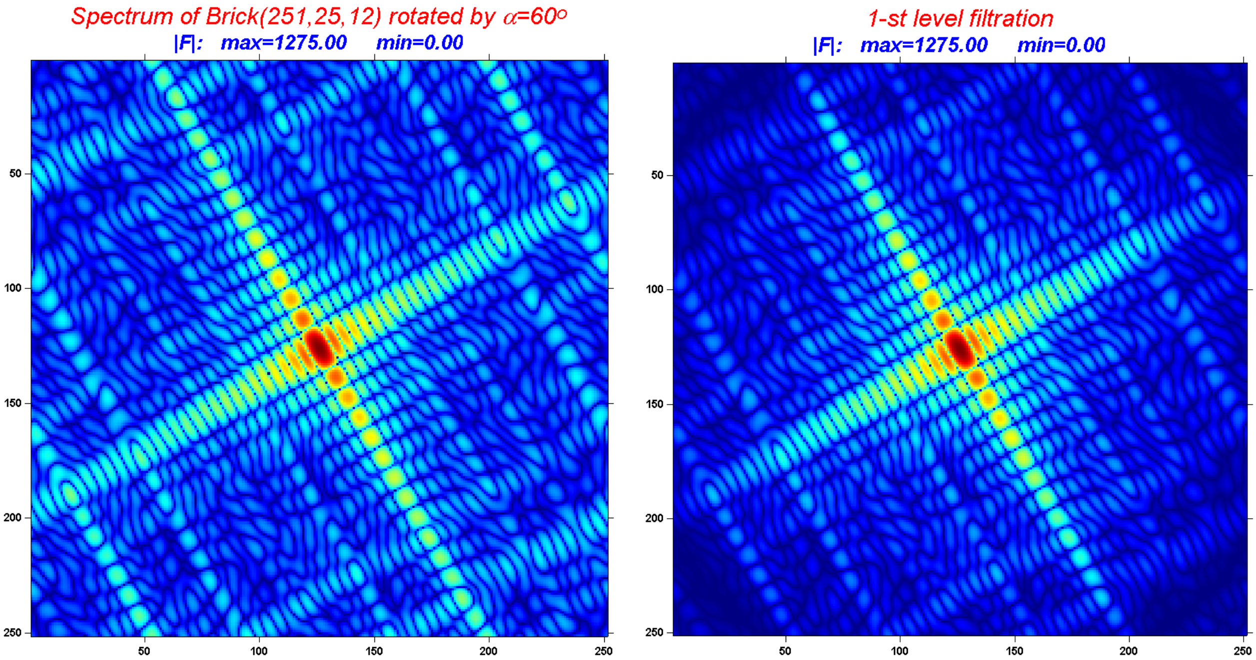


Рис. 8. Пример топологической фильтрации

Покажем, что $N \times N$-матрицу T_l можно считать приближением к F_0. Действительно, хорошо известно [19], что для непрерывного преобразования Фурье справедлива *теорема о масштабировании*:

$$\text{если} \quad F(u,v) = \mathscr{F}\big[f(x,y)\big], \quad \text{то} \quad \mathscr{F}[f(kx,ky)] = \frac{1}{k^2} \cdot F\left(\frac{u}{k}, \frac{v}{k}\right) .$$

Другими словами, увеличивая размер изображения, уменьшаем масштаб Фурье-образа.

Разумеется, этот результат, как и теорема о вращении (21), не может быть непосредственно перенесен на дискретный случай. Вместе с тем, матрицу Q можно считать аппроксимацией непрерывного преобразования Фурье на первых l слоях обвертки тора. Будем называть T_l топологической фильтрацией порядка l; рис. 8 демонстрирует фильтрацию первого порядка дискретного спектра прямоугольника, рассматривавшегося на рис. 1 и 5. Авторы надеются вернуться к оценке погрешности предложенного алгоритма, вместе с детальным обсуждением дискретной версии теоремы о масштабировании, в одной из дальнейших работ.

Вспоминая, что сложность быстрого преобразования Фурье составляет $O(N^2 \log N)$, заметим, что сложность предложенного алгоритма оценивается как $O\big(k^2 N^2 \log(kN)\big)$, что для фиксированного порядка фильтрации сопоставимо со сложностью БПФ.

Заключение

В работе различия в свойствах непрерывного и дискретного преобразований Фурье объясняются разной топологией их частотных областей: сферы в первом, и тора во втором случаях. Введено понятие обвертки тора и показано, что дискретное преобразование Фурье цифрового изображения является дискретизацией обвертки тора непрерывным Фурье-образом тривиальной аппроксимации этого изображения кусочно-постоянной функцией. Как следствие, ДПФ представлено суммой ряда, начальный член F_0 которого совпадает с дискретизацией непрерывного Фурье-образа, а последующие связаны с влиянием высокочастотных гармоник. Поскольку для F_0 выполняется теорема о вращениях, использование его вместо дискретного преобразования Фурье F в частотных методах обработки цифровых изображений и анализа их симметрии позволяет избавиться от систематических ошибок, вызываемых алиасингом, и повысить точность и надежность этих методов. Для построения F_0 предлагается алгоритм *топологической фильтрации*, сложность которого сопоставима со сложностью быстрого преобразования Фурье.

Литература

[1] *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2005. 1072 с.

[2] *Яне Б.* Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2007. 584 с.

[3] *Pratt W. K.* Digital image processing. — John Wiley & Sons, 2007. 782 p.

[4] *Ахметшин А. М., Бойко В. А., Бусыгин Б. С.* Инвариантные к влиянию поворота спектральные характеристики текстурных изображений // Радиоэлектронные и компьютерные системы. 2005. Т. 12. №4. С. 102–107.

[5] *Hoang T., Tabbone S.* Invariant pattern recognition using the RFM descriptor // Pattern Recognition, 2012. Vol. 45(1). P. 271–284.

[6] *Reddy S., Chatterji B.* An FFT-based technique for translation, rotation, and scale invariant image registration // IEEE Trans. Image Processing, 1996. Vol. 5(8). P. 1266–1271.

[7] *Yap P., Jiang X., Kot A.* Two-dimensional polar harmonic transforms for invariant image representation // IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence, 2010. Vol. 32(7). P. 1259–1270.

[8] *Cox R. W., Tong R.* Two and three dimensional image rotation using the FFT // IEEE Trans. Image Processing, 1999. Vol. 8(9). P. 1297–1299.

[9] *Larkin K., Oldfield M., Klemm H.* Fast Fourier method for the accurate rotation of sampled images // Optics Communications, 1997. Vol. 139. P. 99–106.

[10] *Owen C., Makedon F.* High quality alias free image rotation // 30th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers Proceedings. Pacific Grove, California, 1996.

[11] *Park W., Leibon G., Rockmore D. N., Chirikjian G. S.* Accurate image rotation using hermite expansions // IEEE Trans. Image Processing, 2009. Vol. 18(9). P. 1988–2003.

[12] *Каркищенко А. Н., Мнухин В. Б.* Преобразование симметрии периодических структур в частотной области // Математические методы распознавания образов: 15я Всероссийская конф. г. Петрозаводск. — М.: МАКС Пресс, 2011. С. 386–389.

[13] *Каркищенко А. Н., Мнухин В. Б.* Распознавание симметрии изображений в частотной области // Интеллектуализация обработки информации (ИОИ-12). — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. С. 426–429.

[14] *Мнухин В. Б.* Интегральное преобразование для распознавания симметрии изображений // Научно-технические ведомости СПбГПУ: Информатика. Телекоммуникации. Управление, 2013. Т. 176, №4. С. 123–130.

[15] *Мнухин В. Б.* Распознавание симметрии полутоновых изображений с помощью интегрального преобразования // Инфокоммуникационные технологии, 2013. Т. 12. №2. С. 4–8.

[16] *Derrode S., Ghorbel F.* Shape analysis and symmetry detection in gray-level objects using the analytical Fourier-Mellin representation // Signal Processing, 2004. Vol. 84(1). P. 25–39.

[17] *Hoggar S. G.* Mathematics of digital images: Creation, compression, restoration, recognition. Cambridge University Press, 2006. 854 p.

[18] *Trussell H. J., Vrhel M. J.* Fundamentals of digital imaging. CUP, 2008. 532 p.

[19] *Poularikas A. D.* The transform and applications handbook. — CRC Press, 2010. 1336 p.

[20] *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971. 408 с.

[21] *Сойфер В. А.* Методы компьютерной обработки изображений. — М.: Физматлит, 2003. 784 с.

[22] *Лавреньтев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. 736 с.

[23] *Коблиц Н.* Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. — М.: Мир, 1988. 320 с.

[24] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

[25] *Басараб М. А., Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Яковлев В. П.* Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона. — М.: Радиотехника, 2004. 72 с.

[26] *Easton R. L. Jr.* Fourier methods in imaging. — John Wiley & Sons, 2010. 930 p.

[27] *Russ J. C.* The image processing handbook. — CRC Press, 2011. 838 p.

[28] *Brayer J. M.* Introduction to Fourier transforms for image processing. University of New Mexico, USA, 2014. `http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html`.

References

[1] *Gonzalez R., Woods R.* 2002. *Digital image processing.* Prentice Hall. 1072 p.

[2] *Jähne B.* 2005. *Digital image processing.* Springer-Verlag. 584 p.

[3] *Pratt W. K.* 2007. *Digital image processing.* John Wiley & Sons. 782 p.

[4] *Akhmetshin A. M., Boiyko V. A., Busigin B. S.* 2005. Rotation-invariant spectral characteristics of textures. *Radioelectronic Computer Systems* 12(4):102–107.

[5] *Hoang T., Tabbone S.* 2012. Invariant pattern recognition using the RFM descriptor. *Pattern Recognition* 45(1):271–284.

[6] *Reddy S., Chatterji B.* 1996. An FFT-based technique for translation, rotation, and scale invariant image registration. *IEEE Transactions Image Processing* 5(8):1266–1271.

[7] *Yap P., Jiang X., Kot A.* 2010. Two-dimensional polar harmonic transforms for invariant image representation. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence* 32(7):1259–1270.

[8] *Cox R. W., Tong R.* 1999. Two and three dimensional image rotation using the FFT. *IEEE Trans. Image Processing* 8(9):1297–1299.

[9] *Larkin K., Oldfield M., Klemm H.* 1997. Fast Fourier method for the accurate rotation of sampled images. *Optics Communications* 139:99–106.

[10] *Owen C., Makedon F.* 1996. High quality alias free image rotation. *30th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers Proceedings.* Pacific Grove, California.

[11] *Park W., Leibon G., Rockmore D. N., Chirikjian G. S.* 2009. Accurate image rotation using hermite expansions. *IEEE Trans. Image Processing* 18(9):1988–2003.

[12] *Karkishchenko A. N., Mnukhin V. B.* 2011. Continuous symmetry transform of periodic patterns in the frequency domain. *15th All-Russian Conference on Mathematical Methods in Image Recognition.* Moscow. 386–389.

[13] *Karkishchenko A. N., Mnukhin V. B.* 2012. Symmetry recognition in the frequency domain. *9th Conference (International) on Intelligent Information Processing.* Moscow. 426–429.

[14] *Mnukhin V. B.* 2013. Integral transform for symmetry recognition of gray-level images. *St. Petersburg State Polytechnical University J.: Computer Sci. Telecommunications Control Systems* 176(4):123–130.

[15] *Mnukhin V. B.* 2013. Symmetry recognition in gray-level images based on an integral transform. *Information Communication Technologies* 12(2):4–8.

[16] *Derrode S., Ghorbel F.* 2004. Shape analysis and symmetry detection in gray-level objects using the analytical Fourier–Mellin representation. *Signal Processing* 84(1):25–39.

[17] *Hoggar S. G.* 2006. *Mathematics of digital images: Creation, compression, restoration, recognition*. Cambridge University Press. 854 p.

[18] *Trussell H. J., Vrhel M. J.* 2008. *Fundamentals of digital imaging*. CUP. 532 p.

[19] *Poularikas A. D.* 2010. *The transform and applications handbook*. CRC Press. 1336 p.

[20] *Khurgin J. I., Jakovlev V. P.* 1971. *Compact support functions*. Moscow: Nauka. 408 p.

[21] *Soifer V. A.* 2003. *Methods of computer image processing*. Moscow: Fizmatgiz. 784 p.

[22] *Lavrentiev M. A., Shabat V. B.* 1973. *Methods of the theory of functions of a complex variable*. Moscow: Nauka. 736 p.

[23] *Koblitz N.* 1984 *Introduction to elliptic curves and modular forms*. Springer-Verlag. 320 p.

[24] *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* 1963. *Table of integrals, series, and products*. Moscow: Fizmatgiz. 1100 p.

[25] *Basarab M. A., Zelkin E. G., Kravchenko V. F., Yakovlev V. P.* 2004. *Digital signal processing on the base of the Whittaker–Kotelnikov–Shannon theorem*. Moscow: Radiotekhnica. 72 p.

[26] *Easton R. L. Jr.* 2010. *Fourier methods in imaging*. John Wiley & Sons. 930 p.

[27] *Russ J. C.* 2011. *The image processing handbook*. CRC Press. 838 p.

[28] *Brayer J. M.* 2014. *Introduction to Fourier transforms for image processing*. Available at: http://www.cs.unm.edu/ brayer/vision/fourier.html.