Двумерные вариации как средство оценивания сложности изображений*

П. А. Чочиа

chochia@iitp.ru

Институт проблем передачи информации РАН, Москва 127051, Большой Каретный пер., д. 19

Исследованы вопросы оценки *сложности* изображения, которая интерпретируется как характеристика, отражающая число, размеры и заметность его деталей. Исследованы возможности использования для этого двумерных вариаций. Рассмотрены модификации известных двумерных вариаций в применении к дискретным изображениям. Предложена оценка, названная *показатель размеров объектов*. Теоретические выводы подтверждены экспериментальными исследованиями. Проведен анализ изменения значений двумерных вариаций изображения при увеличении шума, а также при сглаживании и декомпозиции. Показано, что предложенная комбинация двумерных вариаций отражает морфологическую структуру изображения и может служить оценкой его сложности.

Ключевые слова: *двумерные вариации; сложность изображения; обработка видеоинформации*

DOI: 10.21469/22233792.1.12.02

Two-dimensional variation as an image complexity assessment*

P. A. Chochia

Institute for Information Transmission Problems RAS, 19 Bolshoy Karetny, Moscow, Russia

The questions of *image complexity* assessment and using of two-dimensional variations are studied. The image complexity is interpreted as some attribute which is specified by the quantity, the sizes, and the visibility of image details. Different known two-dimensional variation methods are considered in their application to digital images. The modified assessment is proposed that is named as the *component size index*. The change of variations under different image transformations are analyzed. Theoretical conclusions are confirmed by the experimental explorations. The proposed combination of two-dimensional variations was demonstrated to reflect morphological structure of an image and to assess its complexity.

Keywords: *two-dimensional variation; image complexity; image processing*

DOI: 10.21469/22233792.1.12.02

1 Введение

Применение методов обработки видеоинформации предполагает оценку получаемого результата. В задачах, которые удается формулировать как задачи восстановления или фильтрации сигнала, для этой цели часто используются различные варианты отклонений (MSE — mean square error, PSNR — peak signal-to-noise ratio, SSIM — structural similarity и др.), которые удобны в теоретических разработках, а также в случаях, когда исходный сигнал известен. В реальных же ситуациях неискаженный сигнал недоступен. При

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 14-50-00150.

таких условий хотелось бы найти численную оценку результата, которая была бы адекватна изображению как двумерной функции и при этом не использовала бы оригинальный сигнал.

Для решения подобной задачи, как правило, предлагаются методы, использующие один из следующих двух подходов. Первый заключается в попытке решения задачи оценивания качества изображения [1, 2]. Второй чаще всего связан с независимым оцениванием сложности сигнала, но обычно его используют при существенных ограничениях, например в задаче сжатия [3] или в задаче автоматического опознавания целей [4].

Применительно к изображению, которое является двумерным сигналом, также хотелось бы выбрать оценку, характеризующую его пространственную изменчивость. Плодотворным здесь представляется подход, основанный на рассмотрении изображения как функции с ограниченной вариацией [5] и оценивании ее изменчивости при помощи механизма двумерных и многомерных вариаций [6–9]. Вопрос возможности применения двумерных вариаций для оценки изображения рассматривался в статьях [10–12]; настоящая работа является продолжением указанных исследований.

В работе рассматриваются варианты реализации различных двумерных вариаций в применении к дискретным сигналам и исследованы возможности их использования для оценки сложности изображений. Сложность изображения интерпретируется как характеристика, отражающая число, размеры и заметность (контраст) его деталей. Также полагается, что при увеличении числа и контраста деталей сложность изображения должна возрастать, а при увеличении размеров деталей — уменьшаться.

Понятие сложности трактуется по-разному для сигналов, функций и потока сообщений. Одномерный сигнал, являющийся действительной функцией времени, характеризуется энергией, длительностью и шириной спектра [13]. Сложность аналитической функции многих переменных принято характеризовать числом ее переменных n, а для s раз дифференцируемых функций — отношением n/s [14]. Теоретико-информационный подход к оценке сложности потока сообщений, представимого в дискретном виде, основан на вычислении энтропии $H = -\Sigma\, p(z)\log(p(z))$, где $p(z)$ — вероятность элемента изображения со значением z. Иногда для оценивания сложности дискретного сигнала используется коэффициент сокращения объема данных (количества бит), который требуется для восстановления. Такой подход, идеологически близкий понятию колмогоровской сложности [15], связан с необходимостью выбора того или иного алгоритма сжатия и по сути является вариантом энтропийного оценивания.

Каждый из указанных способов оценки сложности по тем или иным причинам мало или даже совсем не применим к изображению как двумерной функции яркости пространственных координат, отражающей некоторую физическую характеристику наблюдаемой сцены. В частности, существенный общий недостаток перечисленных вариантов оценок заключается в том, что они не являются метрическими характеристиками и не зависят от амплитуды сигнала.

2 Двумерные вариации и их дискретные аналоги

Распространенной метрической характеристикой изменчивости и сложности одномерной функции на отрезке $[a, b]$ является вариация. Считая функцию $f(x)$ отражением некоторой реальной физической величины (например, энергии или плотности), можно полагать, что $f(x)$ на наблюдаемом отрезке ограничена и имеет конечное число точек разрыва первого рода. Тогда $f(x)$ является функцией с ограниченной полной вариацией, которая по определению есть величина

$$V_a^b(z(x)) \triangleq \sup_P \sum_{k=0}^{K-1} \|z(x_{k+1}) - z(x_k)\|, \tag{1}$$

т. е. точная верхняя грань по всем возможным разбиениям P отрезка $[a,b]$. В контексте кусочно-постоянной модели изображения [16] существенно отметить, что значение вариации не изменяется при «вставке» в функцию $z(x)$ участков вида $z(x) = const$, $\{x \in [c,d] \subset [a,b]\}$, если при этом не добавляются разрывы первого рода.

Полная вариация $V_a^b(z(x))$ может служить удовлетворительной оценкой сложности одномерной функции. Предложено много ее обобщений на случай функции многих переменных (вариации Витали, Арцела, Фреше, Тонелли и др.). Все они сводятся к тому, что определяется некоторый функционал, ограниченность которого гарантирует наличие у функции ряда свойств, аналогичных свойствам одномерной функции с конечным изменением. Однако перечень таких свойств оказывается ощутимо беднее набора свойств вариации для одномерных функций, хотя при этом и удается формулировать отдельные выводы и теоремы [8]. К тому же возникает определенная неоднозначность многомерных вариаций, в частности связанная с тем, что они существенно зависят от выбора системы координат.

Многомерные вариации (по аналогии с одномерными) формулируются для непрерывных функций как точные верхние грани выбранных функционалов по множеству допустимых разбиений носителя секущими гиперплоскостями на элементарные параллелепипеды. В случае дискретной функции неприятность состоит в том, что минимальное разбиение ограничено снизу пространственной точностью ее представления. Поэтому формулы вариации дискретных функций являются лишь соответствующими аналогами и приближениями формул вариации непрерывных функций, что в некоторых случаях может вызвать определенные неточности. Также необходимо отметить, что далеко не все операции могут быть применимы к дискретной функции без потери информации: например, операции поворота на произвольный угол или операции сжатия как в области носителя, так и в пространстве значений.

Рассмотрим, как будут выглядеть наиболее известные определения вариаций [8, 9, 17] в применении к двумерной дискретной функции $\mathbf{F} = \{f(i,j)\}$ $(i = 1, ..., I; j = 1, ..., J)$ на прямоугольном носителе D с соответствующим разбиением.

Арцела вариация [8, 17] по сути является суммой модулей градиентов по координатным осям и представляется формулой:

$$A(\mathbf{F}, D) = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} (|f(i+1,j) - f(i,j)| + |f(i,j+1) - f(i,j)|)\,. \tag{2}$$

Данный способ оценки изменчивости двумерной функции используется в большинстве теоретических и практических разработок.

Витали вариация [8, 17] формально записывается как

$$V(\mathbf{F}, D) = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} |f(i+1,j+1) + f(i,j) - f(i,j+1) - f(i+1,j)|\,. \tag{3}$$

В качестве существенного недостатка данного *дискретного* представления вариации следует отметить, что на участках функции $f(i,j)$, где наблюдаются перепады ее значений в направлении только одной из координатных осей (i или j), отклик оператора, соответствующего формуле (3), будет равен нулю.

Пьерпонта вариация [17, 18] предполагает равномерное разбиение каждой из сторон прямоугольника D на равные между собой отрезки, что идеологически соответствует равномерной дискретизации носителя. В каждом образуемом элементарном параллелепипеде $\delta(i,j)$ измеряется величина колебания $\omega(\mathbf{F},\delta(i,j))$, а вариация вычисляется как

$$P(\mathbf{F},D)=\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}\omega(\mathbf{F},\delta(i,j))\,. \tag{4}$$

Согласно [18], колебание ω есть $\omega(\mathbf{F},\delta(i,j))=\max\{f(x,y)\in\delta(i,j)\}-\min\{f(x,y)\in\delta(i,j)\}$, что в дискретном случае можно определить как

$$\omega(\mathbf{F},\delta(i,j))=\max\{|f(i{+}1,j)-f(i,j)|,|f(i,j{+}1)-f(i,j)|\}\,.$$

Тонелли вариация [8, 17] определяется как сумма одномерных вариаций (1) по всем значениям i и j каждой из координат при постоянном значении второй координаты. Пусть $\psi_1(i)$ — одномерная вариация функции $f(i,j)$ по j при $i=const$, а $\psi_2(j)$ — одномерная вариация функции $f(i,j)$ по i при $j=const$. Тогда

$$T(\mathbf{F},D)=\sum_{i=1}^{I}\psi_1(i)+\sum_{j=1}^{J}\psi_2(j)\,. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что значения, вычисляемые по формулам (5) и (2) будут равны, т. е. вариации Арцела и Тонелли для дискретных функций совпадают.

Фреше вариация [17] в формулировке для двумерной дискретной функции совпадает с Харди вариацией [8, 17] и вычисляется следующим образом:

$$\Delta_1(f;(i,j))=f(i{+}1,j)-f(i,j)\,;$$
$$\Delta_2(f;(i,j))=\Delta_2(\Delta_1(f;(i,j)))=(f(i{+}1,j{+}1)-f(i,j{+}1))-(f(i{+}1,j)-f(i,j))\,;$$

$$F(\mathbf{F},D)=H(\mathbf{F},D)=\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}|\Delta_2(\Delta_1(f;(i,j)))|. \tag{6}$$

Как легко заметить, формулы (6) и (3) совпадают, т. е. вариации Витали, Фреше и Харди для дискретных функций будут между собой равны, в то время как для непрерывных функций они различаются.

Рассмотренные вариации так или иначе имеют в своей основе значение модуля градиента функции в точке, поэтому их величины и поведение близки между собой.

Кронрода вариация [7] в ряду вариаций многомерных функций стоит особняком по той причине, что не использует градиентные характеристики функции, а также дает в результате значения не одного, а нескольких функционалов. Ее рассмотрению посвящен следующий раздел.

3 Двумерная вариация Кронрода

Обобщения отдельных выводов и теорем, которые удавалось формулировать, используя определения вышеперечисленных вариаций (для непрерывных функций), привели к выводу, что функция многих переменных должна характеризоваться не одним, а несколькими функционалами, которые в определенном смысле независимы. Данный тезис был обоснован А. С. Кронродом при изучении функций двух переменных [7]. Основываясь на понятии множеств уровня, он предложил для функции двух переменных использовать два функционала, определяемые следующим образом:

$$w_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(e_t)\,dt\,; \qquad w_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(e_t)\,dt\,. \tag{7}$$

Здесь множество e_t — это t-уровень функции $f(x, y)$, т. е. множество тех точек (x, y), в которых $f(x, y) = t$; $v_0(e_t)$ — число компонент множества e_t; $v_1(e_t)$ — длина e_t (по Хаусдорфу). Тем самым значение w_1 характеризует число локальных экстремумов функции.

Витушкиным было найдено удачное определение вариации множества, причем данный подход, также основанный на рассмотрении множеств уровня, был расширен для функций многих переменных [8]. Для плоского множества e_t, которое является t-уровнем функции $f(x, y)$, вариация задается не одним, а тремя значениями: v_0, v_1 и v_2, которые определяются следующим образом.

Пусть E — замкнутое ограниченное множество на плоскости; тогда вариация $v_0(E)$ есть число компонент E, вариация $v_2(E)$ есть суммарная площадь компонент E, а значение вариации $v_1(E)$ определяется следующим выражением [8, 9]:

$$v_1(E) = c\int_{0}^{2\pi} v_0(E, L_\alpha)\,d\alpha\,,$$

где

$$v_0(E, L_\alpha) = \int_{L_\alpha} v_0\left(E \cap (L_\alpha)^{\perp}_{z}\right)\,dz\,.$$

Здесь L_α — прямая $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$, а $(L_\alpha)^{\perp}_{z}$ — прямая, проходящая через точку $z \in L_\alpha$ перпендикулярно к L_α. Константа c выбирается таким образом, чтобы для отрезка I единичной длины на оси $0x$ выполнялось соотношение: $v_1(I) = 1$. Для случая конечной $v_0(e_t)$, вариацию $v_1(e_t)$ можно интерпретировать как длину границ компонент e_t. Вариации v_0, v_1 и v_2 названы соответственно *нулевой*, *линейной* и *плоской* согласно тому, как изменяются их значения при гомеоморфизме: v_0 не меняется, v_1 меняется линейно с изменением коэффициента растяжения K, а v_2 меняется пропорционально K^2, т. е. как площадь плоской фигуры.

Важно отметить, что вариация v_0 множества уровня e_t, входящая в определение вариации $w_1(f)$, является не метрической, а в определенном смысле топологической характеристикой функции, основанной на понятии связности и не изменяющейся при гомеоморфизме. Касательно значения вариации $w_2(f)$, в [5] было показано, что для непрерывно дифференцируемой на D функции $f(x, y)$ справедливо равенство:

$$w_2(f) = \iint_D |\operatorname{grad}(f(x, y))|\,dxdy\,,$$

т. е. $w_2(f)$ является интегралом модуля градиента функции по области носителя. В нашем случае $f(x, y)$ есть значение сигнала (яркости) изображения, которое можно считать неотрицательным и ограниченным, а значит, пределы интегрирования в (7) можно ограничить диапазоном $[0, T]$, где T — максимальное допустимое значение.

В отличие от v_0 и v_1 характеристика $v_2(e_t)$ не представляет интереса для оценки сложности функции. Рассматривая $v_2(e_t)$ как сумму площадей всех компонент сечения уровня t функции яркости $f(x, y)$, разделенных границами, очевидно, что $v_2(e_t) = S(D)$, т. е. равно площади всего множества D, и тем самым дополнительной информации не несет.

Можно предположить, что полезным окажется использование подмножества $\tilde{v}_2(e_t)$ ($\tilde{v}_2(e_t) \subset v_2(e_t)$), состоящего, скажем, только из тех точек (x, y), для которых выполняется $f(x, y) \geqslant t$. По аналогии с (7) определим третий функционал как интеграл плоской вариации

$$w_3(f) = \int\limits_0^T \tilde{v}_2(e_t)\, dt\,,$$

значение которого будет равно объему трехмерной фигуры, ограниченной функцией $f(x, y)$ и плоскостью $z(x, y) = 0$. Поскольку $f(x, y)$ задана на ограниченном двумерном множестве $D \ni (x, y)$, справедливо выражение $\tilde{v}_2(e_t)/S(D) = 1 - F_f(t)$, где $S(D)$ — площадь D, а $F_f(t)$ — функция распределения значений $f(x, y)$. Отсюда

$$\tilde{v}_2(e_t) = S(D)\left(1 - \int\limits_0^t h(z)\, dz\right) = S(D)\int\limits_t^T h(z)\, dz\,,$$

где $h(z) = p\{f(x, y) = z\}$ есть плотность вероятности значений функции $f(x, y)$. Легко видеть, что при этом соотношение $w_3(f)/S(D)$ будет равно среднему значению $f(x, y)$ на D, или, в интерпретации изображения, его средней яркости. Это означает, что функционал $w_3(f)$ также не содержит информации о структуре $f(x, y)$. Тем самым, для оценки сложности функции $f(x, y)$ остаются только две вышеприведенные вариации $w_1(f)$ и $w_2(f)$.

В случае дискретной функции $f(i, j)$ двумерные вариации (7) выражаются следующими формулами:

$$w_1(f) = \sum_{x=0}^{T-1} \frac{v_0(e_t)}{T}\,; \qquad w_2(f) = \sum_{x=0}^{T-1} \frac{v_1(e_t)}{T}\,. \tag{8}$$

где T — общее число возможных значений функции $f(i, j)$ (для изображения — число градаций яркости). При вычислении вариаций в качестве множества e_t выступает бинарная матрица $\mathbf{B} = \{b(i, j)\}$, строящаяся следующим образом:

$$b(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(i, j) < t\,; \\ 1, & \text{если } f(i, j) \geqslant t\,. \end{cases}$$

Дискретизация изображения осуществляется, как правило, на квадратной решетке. При этом значение $v_0(e_t)$ определяется как сумма числа связных компонент, составленных из соседствующих (в смысле 4-соседства [19]) элементов изображения со значением $b(i, j) = 0$ и числа аналогичных связных компонент из элементов с $b(i, j) = 1$. Значение $v_1(e_t)$ есть суммарная длина границ компонент $v_0(e_t)$. В случае дискретной функции $f(i, j)$ значение $v_1(e_t)$ зависит от способа вычисления длины границы. На квадратной решетке длину границ чаще всего измеряют в метрике L_1, определяя $v_1(e_t)$ как суммарное число сегментов решетки, разделяющих элементы с несовпадающими значениями.

Формальное вычисление значений вариаций согласно (8) на ограниченном носителе D предполагает, что сама область D также учитывается в качестве отдельной компоненты.

Это приводит к следующему противоречию. Вариации w_1 и w_2 для функции постоянного значения $f(i,j) = const$, для которой они, очевидно, должны быть равны нулю, оказываются ненулевыми: $w_1(f) = 1$, а $w_2(f) = P(D)$ — периметру области D. Для устранения данного противоречия следует модифицировать формулы (8) следующим образом:

$$w_1(f) = \left(\sum_{x=0}^{T-1} \frac{v_0(e_t)}{T}\right) - 1\,; \quad w_2(f) = \left(\sum_{x=0}^{T-1} \frac{v_1(e_t)}{T}\right) - P(D)\,. \tag{9}$$

В дальнейшем значения w_1 и w_2 для дискретной функции $f(i,j)$ на ограниченном носителе будут пониматься именно в смысле (9). Будучи нормированным на величину диапазона T, значение w_1 является характеристикой числа и амплитуды объектов изображения, образующих в сечениях отдельные компоненты. Поэтому значение w_1 удобно именовать *показателем числа объектов* изображения. Можно также показать, что значение второй вариации $w_2(f)$ в (8) будет совпадать со значением дискретной вариации Тонелли (5).

4 Показатель размеров объектов изображения

Получаемые значения вариаций Кронрода позволяют оценить некоторые параметры изображения, которые отражают как амплитудные, так и морфологические его характеристики. Значение первой вариации w_1 отражает число и контраст деталей на изображении, а значение второй, w_2, — сумму периметров деталей. Наряду с этим, важным выглядит соотношение вариаций $q_w(f) = w_2(f)/w_1(f)$, которое отражает средний периметр деталей на изображении (здесь предполагаем, что $w_1 > 0$, иначе $q_w(f) = 0$).

В дискретном изображении наименьшим возможным объектом является один элемент (пиксель). Это значит, что минимально возможная компонента из числа входящих в множество уровня e_t имеет линейный размер, равный одному шагу дискретизации. Периметр такой компоненты из одного элемента будет равен 4 — значению, которое есть аналог числа π в метрике L_1 и является минимально возможным для соотношения периметр/площадь объекта. Предполагая, что в дискретном случае длина границ компонент, составляющих $v_1(e_t)$, измеряется в метрике L_1, очевидно, что и для $q_w(f)$ также существует минимально возможное значение, которое тоже равно 4, причем минимум достигается в случае, когда все компоненты множеств уровня e_t для всех t являются одноэлементными. В связи со сказанным удобно ввести характеристику

$$d(f) = \frac{q(f)}{4}\,, \tag{10}$$

которую по аналогии с показателем числа объектов w_1 в (9) естественно назвать *показатель размеров объектов* изображения; для нее будет выполняться соотношение $d(f) \geqslant 1$.

5 Двумерная вариация как оценка сложности изображения

Для изображений с преобладанием мелких деталей, которые на множествах уровня отображаются компонентами небольших размеров, значения d будут малыми, а для изображений с крупными деталями — большими. Отметим, что к деталям изображения относятся также и шумы, являющиеся локальными выбросами сигнала и проявляющиеся на множествах уровня как самостоятельные компоненты с минимально возможным периметром. В связи с этим значение d должно убывать при увеличении числа и амплитуды шумовых выбросов. Ниже этот факт подтверждается экспериментально.

Особый интерес представляет поведение значений $w_1(f)$ и $d(f)$ при возможных преобразованиях функции $f(x, y)$. Для некоторых важных частных случаев можно сформулировать следующие утверждения.

1. Значение w_1 не зависит от выбора системы координат, а d зависит от выбора или поворота системы координат относительно носителя D лишь в степени точности дискретизации $f(x, y)$.
2. При линейных амплитудных преобразованиях вида $Cf(x, y)$, где C — константа, значение w_1 увеличивается пропорционально C, а значение d не изменяется.
3. При линейном пространственном растяжении носителя D в K раз значение w_1 не изменяется, а значение d увеличивается также в K раз.
4. Расширим D добавлением области U, на которой $f(x, y)$ имеет постоянное значение, т.е. $f(x, y) = const \quad \{(x, y) \in U \subset \tilde{D} = D \cup U\}$, с условием, что при расширении не возникает новых участков разрыва первого рода. Такое расширение не приводит к изменению значений w_1 и d.
5. При увеличении количества деталей на изображении (но при сохранении необходимых статистических соотношений и распределений) значение w_1 пропорционально увеличивается, а d не изменяется.
6. Пусть область D прямоугольна, и по выбранной оси, скажем, оси Y, ограничена отрезком $[a, b]$. Расширим ее областью U, заданной на полуотрезке $(b, c]$, на котором $f(x, y)$ имеет зеркальное продолжение: $f(x, b+y) = f(x, b-y)$. При таком расширении значение w_1 возрастает пропорционально изменению площади, тогда как значение d не меняется.

Таким образом, при указанных изменениях двумерной функции $f(x, y)$ как минимум одно из значений w_1 и d оказывается инвариантом, второе же значение является предсказуемой функцией преобразования. Применительно к изображениям утверждение 2 соответствует линейному изменению контраста; утверждение 3 — линейной геометрической трансформации; утверждение 4 — добавлению/удалению участков изображения с ровным фоном без деталей; утверждение 5 близко предыдущему и соответствует концентрации/разреженности деталей на изображении; утверждение 6 — вариант зеркальной пролонгации изображения за рамки области D, часто используемый алгоритмами локального анализа. Кроме того, повторение свойств части изображения на всем изображении по существу означает однородность (стационарность), т. е. достаточность определения значений w_1 и d на доверительном участке и интерпретации их для изображения в целом.

Отметим важную особенность введенного показателя размеров объектов $d(f)$, имеющую следствие в утверждениях 2 и 5. Характеристика $d(f)$ обладает тем свойством, что отражает лишь средние размеры объектов на изображении и не зависит от их количества и контраста самих объектов — эту часть информации несет вариация $w_1(f)$.

Из сказанного ясно, что первая вариация $w_1(f)$ вместе с характеристикой $d(f)$ отражают пространственную и яркостную изменчивость изображения и в совокупности могут служить показателями сложности изображения в соответствии с требованиями, сформулированными во введении. Различное поведение указанных характеристик подтверждает ту изначальную гипотезу Кронрода, что для описания изменчивости двумерных функций какой-то одной вариации недостаточно и следует использовать два независимых функционала.

6 О сравнении и интерпретации оценок

Поскольку характеристик сложности оказывается две, причем они, вообще говоря, независимы, то возникает естественный вопрос, как с их помощью сравнивать различные изображения между собой. Достаточно очевидно, что если характеристика $d(f)$ постоянна, то с увеличением $w_1(f)$ сложность изображения будет возрастать; также сложность будет возрастать и с уменьшением $d(f)$ при постоянном $w_1(f)$. Тогда, если для пары изображений f_1 и f_2 выполняются соотношения $w_1(f_1) < w_1(f_2)$ и $d(f_1) > d(f_2)$, то естественно полагать, что изображение f_2 является более сложным, чем f_1. Остается вопрос, как сравнивать другие случаи.

Рассмотрим изображение с малым значением w_1 и большим значением d; такие соотношения означают, что на изображении имеется малое число деталей больших размеров (с большими периметрами). Если значения w_1 и d малы, это свидетельствует о том, что деталей на изображении содержится мало, причем они небольшого размера. Случай одновременно больших значений w_1 и d, означающий наличие большого числа деталей больших размеров, как очевидно, ограничен размерами самой области D. Во всех подобных случаях обычно принято говорить, что оценка сложности зависит от конкретной задачи.

В некоторых случаях оптимизация в многомерном пространстве затруднительна и приходится из нескольких функционалов тем или иным образом формировать единое обобщенное значение. В качестве одного из простейших вариантов обобщения можно предложить следующую линейную комбинацию:

$$w(z) = w_1(z) + Cw_2(z) = w_1(z)(1 + Cd(z))\,, \tag{11}$$

которая может, например, применяться в задачах восстановления в качестве стабилизирующего функционала $\Omega(z)$.

7 Использование оценки сложности в задачах восстановления

Численные оценки сигнала актуальны при решении различных задач, в частности классической оптимизационной задачи восстановления искаженного сигнала методом регуляризации [20], которая формулируется следующим образом. Пусть исходный сигнал z искажен оператором A (линейным или нелинейным) и шумом ξ, в результате чего наблюдается сигнал $u = A(z) + \xi$. Полагая оператор A с определенной точностью известным, строится восстанавливающий оператор $\hat{A}$ (алгоритм) $\hat{A}(u) \Rightarrow \{z_\alpha\}$, отображающий u на множество допустимых результатов $z_\alpha \in Z$. Вычисляется функционал

$$\varphi_\alpha(u, \lambda) = \|Az_\alpha - u\| + \lambda\Omega(z_\alpha)\,, \tag{12}$$

где $\Omega(z_\alpha)$ — неотрицательный стабилизирующий функционал, а λ — регуляризирующий параметр. Оптимальный на Z результат z^* находится путем минимизации функционала $\varphi_\alpha(u, \lambda)$ при выбранном значении λ:

$$\varphi_{z^*}(u, \lambda) = \inf_{z_\alpha \in Z} \varphi_\alpha(u, \lambda)\,. \tag{13}$$

Восстанавливающий оператор $\hat{A}$ строится исходя из предположений о свойствах искажающего оператора A и зависит от конкретных условий. В каких-то случаях, как в задаче линейного восстановления [20], он может быть обратным оператором $\hat{A} = A^{-1}$, в других, как, например, в задаче фильтрации шума на основе полной вариации [21], — единичным оператором $\hat{A} = E$ или каким-то другим.

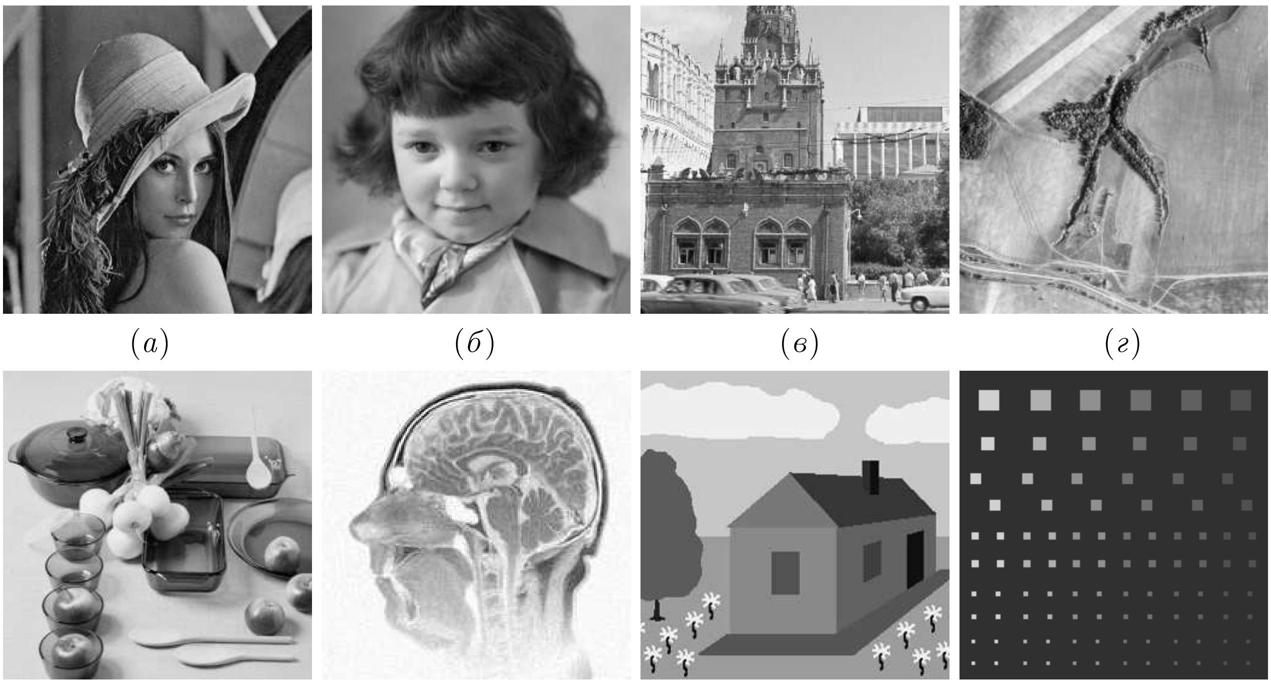
Важным является то, что в отличие от восстанавливающего оператора $\hat{A}$ стабилизирующий функционал $\Omega(z)$, вообще говоря, не зависит от искажающего преобразования и выбирается как некоторая характеристика сигнала z, которая может задаваться исходя из модели сигнала. Для одномерных функций обычно предлагается использовать оценки типа нормы или вариации [20]. В контексте нашей задачи функционал $\Omega(z)$ можно интерпретировать как оценку сложности сигнала. В качестве такового может использоваться значение $w(z)$ из (11).

8 Значения оценок сложности для различных изображений

Представляет интерес, насколько измеряемые значения сложности $w_1(f)$ и $d(f)$ могут меняться от изображения к изображению, как они зависят от уровня шумов и как изменяются при сглаживании. При проведении подобных экспериментов требуется сравнение сигнала, получаемого при преобразовании, с неким эталонным и неискаженным. Сформировать такое эталонное изображение можно, основываясь на двухмасштабной многокомпонентной модели изображения [16]. Согласно данной модели, изображение $f(i,j)$ представляется как аддитивная смесь двух компонент: кусочно-гладкой $S(i,j)$ и текстурно-шумовой $\tau(i,j)$. Последняя в свою очередь несет информацию о текстуре, мелких деталях $t(i,j)$ и шуме $\xi(i,j)$:

$$f(i,j) = S(i,j) + \tau(i,j) = S(i,j) + t(i,j) + \xi(i,j)\,. \tag{14}$$

Для локальных алгоритмов обработки результат преобразования в каждой точке (i,j) зависит лишь от элементов, попадающих в ограниченную и сравнительно небольшую область анализа $R(i,j)$. В [16] показано, что в таком случае для большинства реальных изображений можно считать, что $S(u,v) = S(i,j)$ при условии $(u,v) \subset R(i,j)$. Таким образом в пределах области $R(i,j)$ значение $S(u,v)$ полагается постоянным. Это позволяет



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

(*д*) (*е*) (*ж*) (*з*)

Рис. 1 Тестовые изображения: (*а*) и (*б*) портреты с мелкими и крупными деталями; (*в*), (*г*) и (*д*) городской ландшафт, аэрофотоснимок и натюрморт соответственно; (*е*) компьютерная томограмма; (*ж*) синтезированный рисунок с протяженными кусочно-постоянными объектами; (*з*) тестовый сигнал с деталями различных размеров и яркости на ровном фоне

Таблица 1 Значения двумерных вариаций, показателя размеров объектов (d) и энтропии (E) для изображений на рис. 1

Изображение	A/T	P	$V/F/H$	K–w_1	K–w_2	d	E
а	5242,72	3715,70	2859,43	469,85	5250,25	2,80	7,59
б	2583,56	1825,14	1038,43	129,23	2586,58	5,01	7,60
в	7928,75	6072,46	3497,91	618,79	7935,70	3,21	7,59
г	4178,20	2954,15	1981,67	332,67	4184,39	3,16	7,19
д	3256,29	2389,90	1562,20	256,84	3260,76	3,18	7,34
е	5107,64	3642,48	2499,84	419,62	5108,65	3,05	6,76
ж	1160,50	1021,17	528,25	11,34	1160,48	25,58	3,11
з	811,67	778,54	132,52	33,13	811,67	6,12	0,58
з + шум	1944,96	1539,15	945,04	233,96	1944,93	2,08	3,63

формировать эталонное изображение как кусочно-постоянный двумерный сигнал, который впоследствии будет подвергаться искажениям и процедурам сглаживания.

Для экспериментов был отобран набор из реальных и синтезированных изображений различной детальности и содержания. Часть изображений представлена на рис. 1.

В табл. 1 и 2 представлены значения двумерных вариаций, измеренных для тестовых изображений на рис. 1. Двумерные вариации Арцела (A), Тонелли (T), Пьерпонта (P), Витали (V), Фреше (F), Харди (H), Кронрода (K-w_1 и K-w_2) вычислялись согласно формулам (2)–(6) и (9). Приведены также соответствующие показатели размеров объектов (d) согласно (10) и значения энтропии (E).

Как видно, значения одних и тех же вариаций для реальных изображений могут различаться в несколько раз, тогда как значения энтропии отличаются очень мало. Это подтверждает сделанный ранее вывод, что энтропия не является подходящей оценкой сложности изображения. Сравнение значений вариаций в табл. 1 и 2 демонстрирует достаточно точное совпадение вариаций Арцела/Тонелли (A/T) и второй вариации Кронрода (K-w_2) для всех изображений.

Для синтезированных изображений (*ж*) и (*з*) значения вариаций и энтропии оказываются существенно отличающимися от соответствующих значений для реальных изображений. Объясняется это тем, что данные изображения являются кусочно-постоянными и не содержат шума и мелких деталей. Добавление же даже небольшого шума, который обозначен составляющей $\xi(i,j)$ в (14), резко меняет значения оценок и делает их мало отличимыми от тех, которые были получены для реальных изображений. Это демонстрируется в последней строке табл. 1, соответствующей изображению (з), искаженному аддитивным гауссовым шумом с $\sigma = 2$ градации яркости. Более подробно результаты добавления шума и фильтрации рассматриваются ниже.

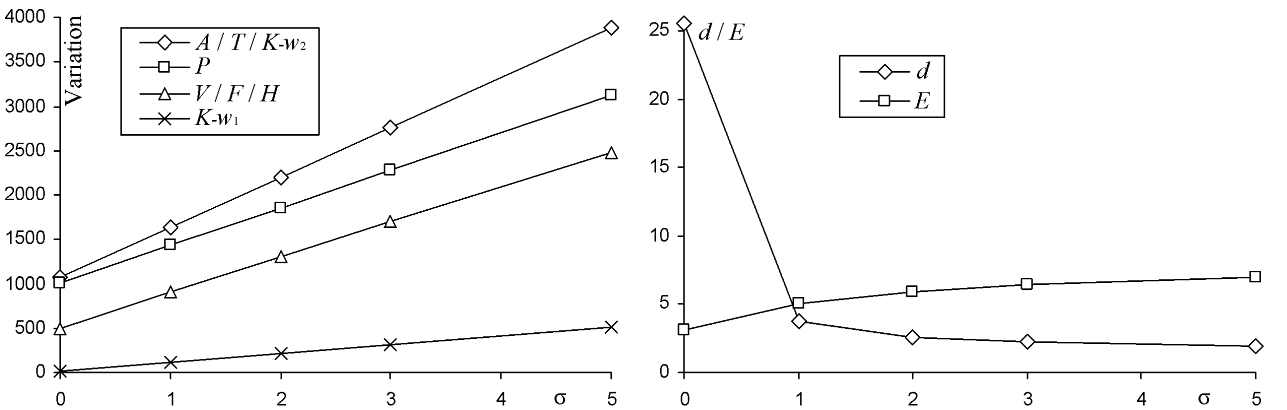
9 Влияние шума на оценку сложности изображения

Для определения влияния шума на оценку сложности изображения было выбрано синтезированное изображение с кусочно-постоянными объектами разных размеров и контраста (см. рис. 1, *ж*). На него наносился нормально распределенный аддитивный шум $N(0,\sigma^2)$ с величиной среднеквадратического отклонения (СКО) $\sigma = 1$, 2, 3 и 5 градаций яркости. Полученные значения различных двумерных вариаций, показателя размеров объектов (d) и энтропии (E) представлены графически на рис. 2, а и 2, б, а численно — в табл. 2.

Таблица 2 Значения двумерных вариаций, показателя размеров объектов (d), энтропии (E) и их зависимости от уровня шума для изображения на рис. 1, *ж*

Шум, градации яркости	A/T	P	$V/F/H$	K–w_1	K–w_2	d	E
$\sigma = 0$	1160,50	1021,17	528,25	11,34	1160,48	25,58	3,11
$\sigma = 1$	1641,15	1327,58	909,12	110,27	1644,71	3,73	5,06
$\sigma = 2$	2198,37	1696,72	1303,17	210,29	2204,56	2,62	5,94
$\sigma = 3$	2758,17	2072,65	1697,21	309,89	2766,76	2,23	6,43
$\sigma = 5$	3867,95	2816,74	2487,14	511,75	3892,58	1,90	7,01

Из приведенных данных и графиков можно сделать следующие выводы: (а) с увеличением уровня шума (для выбранного диапазона шумов) значения всех вариаций растут практически линейно; (б) показатель размеров объектов (d) сначала резко падает, затем убывает медленно, стремясь к предельному значению 1; (в) энтропия (E) асимптотически возрастает до предельного значения 8, равного числу битов в двоичной записи значений яркости; (г) в подтверждение сказанному выше значения вариаций Арцела/Тонелли (A/T) и второй вариации Кронрода (K–w_2) с большой степенью точности совпадают.



(a) Значения вариаций ($б$) Показатель размеров объектов и энтропия

Рис. 2 Зависимость вариаций (*Variation*), показателя размеров объектов (d) и энтропии (E) от величины нанесенного гауссова шума (σ, градации яркости) для изображения на рис. 1, *ж*

10 Влияние сглаживания на оценку сложности изображения

Для исследования изменений оценки сложности изображения при сглаживании было сформировано кусочно-постоянное изображение с множеством объектов разных размеров и контраста относительно фона (см. рис. 1, *з*). Изображение искажалось аддитивным гауссовым шумом с $\sigma = 5$ градаций яркости, после чего для удаления шума и восстановления изображения применялись сглаживающие алгоритмы локального среднего и локальной медианы [19], а также алгоритм декомпозиции изображения [22].

Алгоритмы сглаживания формулируются следующим образом. Определяется фрагмент анализа $R(i,j)$ размерами $L{\times}L$ с центром в точке (i,j). Локальное среднее по точкам (m,n) фрагмента $R(i,j)$ задается формулой:

Таблица 3 Значения СКО, двумерных вариаций (K–w_1 и K–w_2), показателя размеров объектов (d) и энтропии

№	Вид изображения	СКО	K–w_1	K–w_2	d	Энтропия
1	Исходное	0,00	33,13	811,87	6,13	0,58
2	С шумом, $\sigma = 5$ градаций яркости	5,00	533,71	3644,04	1,71	4,93
3	Локальное среднее	19,30	8,83	463,95	13,13	4,08
4	Локальная медиана	20,26	6,80	253,46	10,51	2,09
5	Декомпозиция (1 итерация)	0,64	36,55	872,95	5,97	1,68
6	Декомпозиция (3 итерации)	0,63	32,89	822,22	6,25	1,62

$$A_f(i,j) = \frac{1}{L^2} \sum_{(m,n)\in R(i,j)} f(m,n)\,. \tag{15}$$

Локальная медиана по множеству точек того же фрагмента записывается как

$$M_f(i,j) = \operatorname{med}\{f(m,n) \mid (m,n) \in R(i,j)\}. \tag{16}$$

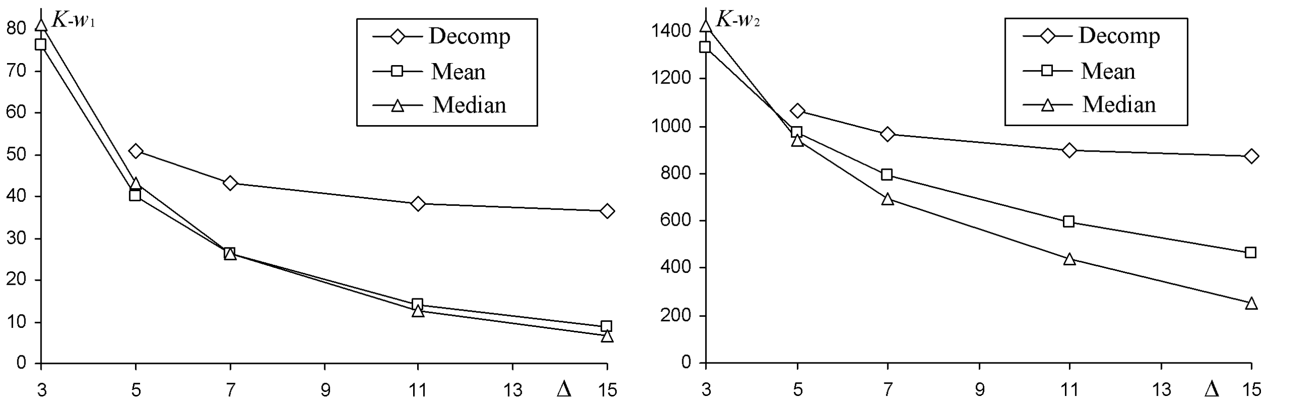
Согласно многокомпонентному представлению (14), изображение $f(i,j)$ представляет собой сумму кусочно-гладкой компоненты $S(i,j)$ и текстурно-шумовой компоненты $\tau(i,j)$, несущей информацию о текстуре, мелких деталях и шуме. Декомпозиция [22] имеет целью разделение изображения $f(i,j)$ на указанные компоненты. Из них в данном случае нас интересует сглаженная компонента $S(i,j)$. Алгоритм заключаются в том, что для каждой точки изображения (i,j) производится последовательный локальный анализ сначала по внутренней окрестности $r(i,j)$ малого размера $l{\times}l$, а затем по окружающему ее фрагменту $R(i,j)$ большого размера $L{\times}L$ ($r \subset R, l < L$). Для анализа множества значений элементов, попадающих в соответствующие фрагменты $r(i,j)$ и $R(i,j)$, используются методы, основанные на порядковых статистиках. Применяемые методы близки известному сигма-фильтру [23], который в свою очередь является частным случаем парзеновского окна [24]. Подробно алгоритм декомпозиции описан в [22, 25].

Результаты преобразований в виде значений двумерных вариаций w_1 и w_2, а также показателя размеров объектов d приведены в табл. 3. Строка 1 соответствует эталонному изображению; 2 — искаженному шумом. Остальные строки отражают результаты фильтрации зашумленного изображения различными алгоритмами сглаживания при одинаковом размере фрагмента анализа (15×15 элементов): 3 — локальное среднее (15); 4 — локальная медиана (16); 4 — сглаженная компонента $S(i,j)$ в (14) после одной итерации декомпозиции; 5 — сглаженная компонента $S(i,j)$ после 3 итераций декомпозиции. Остальные значения вариаций и показателя размеров объектов, получаемые при использовании фрагментов сглаживания других размеров, представлены графически на рис. 3 и 4.

На рис. 3 и 4 показаны зависимости первой и второй вариаций Кронрода (w_1 и w_2), а также показателя размеров объектов (d) и СКО результата фильтрации от неискаженного оригинала в зависимости от размеров фрагмента сглаживания (величина Δ изменяется от 3×3 до 15×15 элементов) для результатов фильтрации алгоритмами локального среднего (Mean), локальной медианы (Median) и декомпозиции (Decomp).

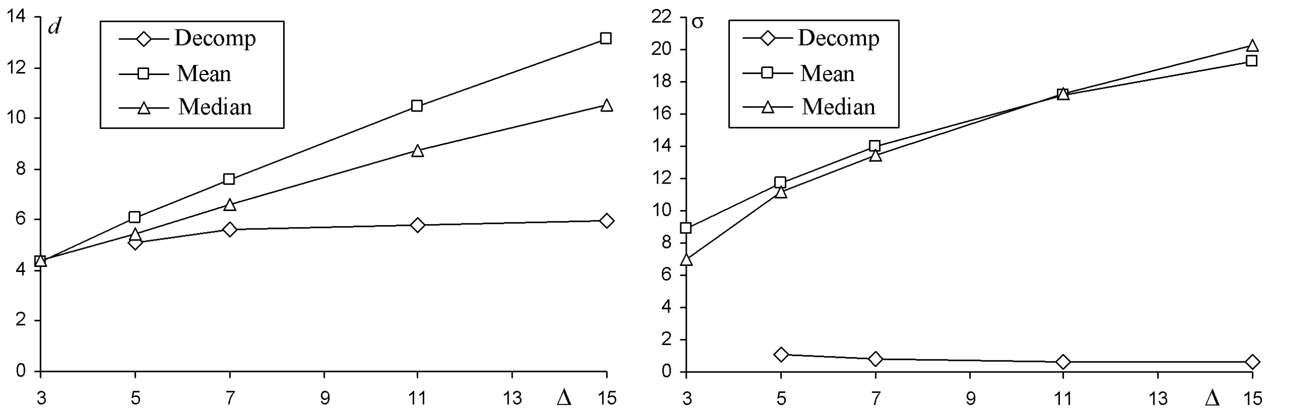
Анализируя полученные результаты, отметим следующее.

1. С увеличением размеров фрагмента сглаживания значения первой (w_1) и второй (w_2) вариаций Кронрода, а также показателя размеров объектов (d) для алгоритма деком-



(*а*) Первая вариация (K–w_1) (*б*) Вторая вариация (K–w_2)

Рис. 3 Зависимость первой (K–w_1) и второй (K–w_2) вариаций Кронрода от размеров фрагмента сглаживания (Δ)



(*а*) Показатель размеров объектов (d) (*б*) Среднеквадратическое отклонение (σ)

Рис. 4 Изменение показателя размеров объектов (d) и СКО (σ) результата фильтрации от неискаженного оригинала в зависимости от размеров фрагмента сглаживания (Δ)

позиции стремятся к постоянным значениям, в то время как для алгоритмов локального среднего и локальной медианы они либо стремятся к нулю, либо возрастают почти линейно (см. рис. 3 и 4, а).

2. Точность восстановления изображения, искаженного шумом, при использовании алгоритма декомпозиции возрастает с увеличением размера фрагмента сглаживания и числа итераций, а алгоритмы локального среднего или локальной медианы при этом дают все более отличающиеся от оригинала результаты (см. табл. 3 и рис. 4, б).
3. Значения вариаций (w_1 и w_2) и показателя размеров объектов (d) в результате декомпозиции возвращаются к значениям, близким тем, которые соответствуют исходному неискаженному изображению (см. табл. 3). То, что данные значения выходят на плато одновременно с асимптотическим приближением к нулю величины отклонения от оригинала (см. рис. 4, б), говорит о стабилизации результата преобразования вблизи исходного неискаженного изображения.
4. Стремление для обычных вариантов сглаживания значений w_1 и w_2 к нулю, а значений d к возрастанию означает уменьшение сложности изображения, что говорит о раз-

рушении сигнала изображения. Выход тех же значений на плато в случае алгоритма декомпозиции означает, что основная структура деталей изображения сохраняется.

5. Малое значение энтропии (2,09) в строке 4 табл. 3 объясняется особенностью медианной фильтрации сигнала, имеющего ограниченное число значений.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при условии справедливости модели [16] выбранная совокупность значений w_1 и d достаточно хорошо отражает морфологическую структуру изображения, в частности такие важные параметры, как число, размеры и заметность деталей изображения, и поэтому может являться оценкой сложности изображения. Определяемая таким способом характеристика может быть использована в качестве оценки сложности изображения, например как стабилизирующий функционал при решении задач восстановления сигнала.

11 Заключение

Исследована возможность оценки сложности изображения при помощи двумерных вариаций. Показана редукция многомерных вариаций непрерывных функций к двумерным дискретным функциям. В данном контексте проведено сравнение различных двумерных вариаций; подтверждено преимущество использования двумерной вариации Кронрода. На основе двумерных вариаций введена характеристика, соответствующая среднему значению периметров деталей на изображении. Предложена модификация данной характеристики, названная *показатель размеров объектов*.

Проанализированы изменения значений вариаций при различных трансформациях изображения. Теоретические выводы подтверждены экспериментальными исследованиями. Продемонстрировано влияние преобразований на сложность изображения, которая интерпретируется как характеристика, отражающая число, размеры и заметность деталей на изображении. Показано, что обычные варианты сглаживания приводят к разрушению сигнала изображения, а алгоритм декомпозиции сохраняет основную структуру деталей изображения.

Предложен вариант редукции двух значений вариаций к единственному обобщенному функционалу, который может использоваться в классических оптимизационных схемах.

Проведенные исследования подтверждают, что комбинация показателя числа объектов w_1 и показателя размеров объектов d отражает морфологическую структуру изображения и может служить оценкой его сложности.

Литература

[1] *Wang Z., Bovik A. C., Sheikh H. R., Simoncelli E. P.* Image quality assessment: From error visibility to structural similarity // IEEE Trans. Image Proc., 2004. Vol. 13. No. 4. P. 600–612.

[2] *Wang Z., Bovik A. C.* Modern image quality assessment. — New York, NY, USA: Morgan and Claypool, 2006. 156 p.

[3] *Yu H., Winkler S.* Image complexity and spatial information // 5th Workshop (International) on Quality of Multimedia Experience (QoMEX) Proceedings. — Klagenfurt, Austria, 2013. P. 12–17.

[4] *Peters R. A., Strickland R. N.* Image complexity metrics for automatic target recognizers // Automatic Target Recognizer System and Technology Conference. — Silver Spring, MD, 1990. P. 30–31.

[5] *Милюкова О. П.* Изображение как функция с ограниченной полной вариацией // Иконика. Цифровая обработка видеоинформации, 2004. — М.: Наука, 1989. С. 19–25.

[6] *Adams C. R., Clarkson J. A.* On definitions of bounded variation for functions of two variables // Trans. Am. Math. Soc., 1933. Vol. 36. P. 824.

[7] *Кронрод А. С.* О функциях двух переменных // УМН, 1950. Т. 5. №1. С. 24–134.

[8] *Витушкин А. Г.* О многомерных вариациях. — М.: Гостехиздат, 1955. 220 с.

[9] *Иванов Л. Д.* Вариации множеств и функций. — М.: Наука, 1975. 352 с.

[10] *Chochia P. A., Milukova O. P.* Two-dimensional variation and image decomposition // 6th Workshop (International) on Image Processing and Computer Optics (DIP-97) Proceedings SPIE, 1998. Vol. 3346. P. 329–339.

[11] *Милюкова О. П., Чочиа П. А.* Об оценке сложности изображений с помощью двумерных вариаций // Информационные процессы, 2012. Т. 12. №4. С. 362–371.

[12] *Чочиа П. А., Милюкова О. П.* Сравнение двумерных вариаций в контексте оценки сложности дискретных изображений // Информационные процессы, 2015. Т. 15. №2. С. 169–182.

[13] *Варакин Л. Е.* Теория сложных сигналов. — М.: Советское радио, 1970. 376 с.

[14] *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. — М.: Физ.-мат. лит., 1959. 228 с.

[15] *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации, 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 3–11.

[16] *Чочиа П. А.* Двухмасштабная модель изображения // Кодирование и обработка изображений. — М.: Наука, 1988, С. 69–87.

[17] Математическая энциклопедия. Т. 1–5. — М.: Советская энциклопедия, 1977.

[18] *Pierpont J.* Lectures on the theory of functions of real variables. — New York, NY, USA: Dover Publications, 1959. Vol. 1. 554 p.

[19] *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2012.

[20] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 285 с.

[21] *Rudin L. I., Osher S., Fatemi E.* Nonlinear total variation based noise removal algorithms // Physica D Nonlinear Phenomena, 1992. Vol. 60. P. 259–268.

[22] *Чочиа П. А.* Сглаживание изображения при сохранении контуров // Кодирование и обработка изображений. — М.: Наука, 1988. С. 87–98.

[23] *Lee J.–S* Digital image smoothing and the sigma filter // Computer Vision Graphics Image Proc., 1983, Vol. 24. No. 2. P. 255–269.

[24] *Parzen E.* On the estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Stat., 1962. Vol. 33. P. 1065–1076.

[25] *Чочиа П. А.* Переход от 2D- к 3D-изображениям: модификация двухмасштабной модели и алгоритмов обработки // Информационные процессы, 2014. Т. 14. №3. С. 242–255.

Поступила в редакцию 25.05.2015

References

[1] Wang, Z., A. C. Bovik, H. R. Sheikh, and E. P. Simoncelli. 2004. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. *IEEE Trans. Image Proc.* 13(4):600–612.

[2] Wang, Z., and A. C. Bovik. 2006. *Modern image quality assessment.* New York, NY: Morgan and Claypool. 156 p.

[3] Yu, H., and S. Winkler. 2013. Image complexity and spatial information. *5th Workshop (International) on Quality of Multimedia Experience (QoMEX).* Klagenfurt, Austria. 12–17.

[4] Peters, R. A., and R. N. Strickland. 1990. Image complexity metrics for automatic target recognizers. *Automatic Target Recognizer System and Technology Conference.* Silver Spring, MD. 30–31.

[5] Milukova O. P. 2004. Izobrazenie kak funktsiya s ogranichennoy polnoy vaeiatsiey [Image as a function with limited total variation]. *Ikonika. Tsifrovaya obrabotka videoinformatsii* [Iconika. Digital processing of video information]. Moscow: Nauka. 19–25.

[6] Adams, C. R., and J. A. Clarkson. 1933. On definitions of bounded variation for functions of two variables. *Trans. Am. Math. Soc.* 36:824.

[7] Kronrod, A. S. 1950. O funktsiyakh dvukh peremennykh [About two-variable functions]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* 5(1):24–134.

[8] Vitushkin, A. G. 1955. *O mnogomernykh variatsiyakh* [About multidimensional variations]. Moscow: Gostekhizdat. 220 p. (In Russian.)

[9] Ivanov, L. D. 1975. *Variatsii mnozestv i funktsiy* [Variations of sets and functions]. Moscow: Nauka. 352 p. (In Russian).

[10] Chochia, P. A., and O. P. Milukova. 1998. Two-dimensional variation and image decomposition. *6th Workshop (International) on Image Processing and Computer Optics (DIP-97) Proceedings SPIE.* 3346:329–339.

[11] Milukova, O. P., and P. A. Chochia. 2013. On estimation of the image complexity by two-dimensional variations. *J. Communications Thechnology Electronics.* 58(6):628–635.

[12] Chochia, P. A., and O. P. Milukova. 2015. Sravnenie dvumetnykh variatsiy v kontekste otsenki sloznosti diskretnykh izobrazeniy [Comparison of two-variable variations in a context of image complexity assessment]. *Informatsionnye protsessy* 15(2):169–182.

[13] Varakin, L. E. 1970. *Teoriya sloznykh signalov* [The theory of complex sygnals]. Moscow: Sovetskoe Radio. 376 p. (In Russian.)

[14] Vitushkin, A. G. 1959. *Otsenka sloznosti zadachi tabulirovaniya* [The assesment of tabulation task complexity]. Moscow: Fiz.-mat. lit. 228 p. (In Russian.)

[15] Kolmogorov, A. N. 1965. *Tri podkhoda k opredeleniyu ponyatiya "kolichestvo informatsii"* [Three approaches to difinition of the "information quantity" conception]. *Problems Information Transmission* 1(1):3–11.

[16] Chochia, P. A. 1988. Dvukhmasshtabnaya model' izibrazeniya [Two-scale image model]. *Kodirovanie i obrabotka izobrazeniy* [Image coding and processing]. Moscow: Nauka. 69–87.

[17] *Matematicheskaya entsiklopediya* [Mathematical encyclopedia]. 1977. Moscow: Sovetskaya entsikloprdiya. Vols. 1–5.

[18] Pierpont, J. 1959. *Lectures on the theory of functions of real variables.* New York, NY: Dover Publications. Vol. 1. 554 p. (In Russian.)

[19] Gonzalez, R. C., and R. E. Woods. 2008. *Digital image processing.* Reading, Mass.: Addison-Wesley. 954 p.

[20] Tikhonov, A. N., and V. Ya. Arsenin. 1979. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [The methods for ill-posed problems decision]. Moscow: Nauka. 285 p. (In Russian.)

[21] Rudin, L. I., S. Osher, and E. Fatemi. 1992. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D Nonlinear Phenomena* 60:259–268.

[22] Chochia, P. A. 1988. Sglazivanie izobrazeniy pri sokhranenii konturov [Image smoothing under preservation of contours]. *Kodirovka i obrabotka izobrazeniy* [Image coding and processing]. Moscow: Nauka. 87–98.

[23] Lee, J.-S. 1983. Digital image smoothing and the sigma filter. *Computer Vision Graphics Image Processing* 24(2):255–269.

[24] Parzen, E. 1962. On the estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Stat.* 33:1065–1076.

[25] Chochia, P. A. 2015. Transition from 2D- to 3D-images: Modification of two-scale image model and image processing algorithms. *J. Communications Technology Electronics* 60(6):678–687.

Received May 25, 2015