О моделях нейронов агрегирующего типа*

З. М. Шибзухов[1,2]***, Д. Ю. Чередников***[2]
szport@gmail.com
[1]Московский педагогический государственный университет, Москва
[2]Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик

Описан новый класс моделей искусственных нейронов агрегирующего типа. Модели агрегирующих нейронов строятся на основе следующих принципов: (1) все вклады синапсов суммируются при помощи агрегирующей операции; (2) вклады простых синапсов, которые образуют сложный синапс или синаптический кластер, преобразуются также при помощи некоторой другой агрегирующей операции. Они охватывают большую часть моделей искусственных нейронов функционального типа. Для класса агрегирующих нейронов, обобщающих модель ΣΠ-нейрона, показано, что они могут быть корректно обучены по конечным наборам прецедентов.

Ключевые слова: *нейронная сеть; модель нейрона; агрегирующая операция*

DOI: 10.21469/22233792.1.12.06

About models of neurons of aggregation type*

Z. M. Shibzukhov[1,2] ***and D. Y. Cherednikov***[2]
[1]Moscow Pedagogical State University, 1 M. Pirogovskaya st., Moscow, Russia
[2]Institute of Applied Mathematics and Automatization, 89-A Shortanova, Nalchik, Russia

A new class of models of artificial neurons is described in this work. These models are based on the following principles: (*i*) contributions of synapses are summed with the help of certain aggregation operation; and (*ii*) contribution of complex synapse or synaptic cluster is computed with the help of another aggregation operation on the set of simple synapses. These models include a big part of the known functional models of neurons. For a class of the aggregating neurons generalizing model ΣΠ-neuron, it is shown that they can be correctly trained on the final sets of precedents.

Keywords: *neural networks; neuron model; aggregation operation*

DOI: 10.21469/22233792.1.12.06

В одном из подходов *искусственная нейронная сеть* (далее просто нейронная сеть) рассматривается как направленный граф, в узлах которого находятся *нейроны*. Каждый нейрон в сети имеет (1) несколько входных каналов от других нейронов или от входов сети и (2) только один выходной канал для передачи на выход нейронной сети или, разветвляясь, на входы других нейронов.

Значительные классы нейронных сетей — нейронные сети *прямого распространения*. Они разделяются на слои, так что (1) нейроны, принадлежащие одному слою, не связаны друг с другом по входам и выходам; (2) выходы нейронов в слое поступают на вход нейронов из другого слоя или на выход сети. Слои пронумерованы, так что на вход нейронов могут поступать сигналы из слоя только с меньшим номером или от входов сети.

Нейроны головного мозга являются сложными его элементами. Они имеют разветвленную *дендритную систему*, в которую сигналы поступают от других нейронов или входов

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-01-03381а.

нейронной сети при помощи *синапсов*. Синапсы могут быть как простые, когда в их образовании участвует единственный вход, так и сложные, когда в их образовании участвуют одновременно несколько входов. Также могут иметь место пространственно локализованные *синаптические кластеры*, которые образуют зоны дендритной системы, где обработка информации ведется независимо от других зон. При этом внутри кластера синапсы могут также оказывать влияние друг на друга.

Для описания преобразования сигналов в нейроне вводится понятие *суммарного потенциала нейрона*, который затем преобразуется в выход нейрона. Входы нейрона преобразуются посредством синапсов и вносят определенный вклад в увеличение или уменьшение суммарного потенциала нейрона. Дендритная система нейрона *агрегирует* вклады синапсов и формирует суммарный потенциал нейрона. На его основе генерируется выходной сигнал нейрона.

Существуют разные типы моделей нейрона, например стохастические модели, когда процесс преобразования информации в нейроне рассматривается как случайный процесс. В детерминированных моделях нейрона его выход и его входы связаны при помощи детерминированной функциональной зависимости. Здесь рассматриваются *функциональные модели* нейронов, в которых значение на выходе является детерминированной функцией от значений на входах нейрона. Различные функциональные модели нейрона получаются в зависимости от того (1) как моделируются простые и сложные синапсы; (2) какие модели используются для описания синаптических кластеров; (3) как агрегируются вклады синапсов.

Большая часть теоретических исследований проводилась для нейронных сетей, построенных на основе классических нейронов вида:

$$y = \sigma(w_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n),$$

где σ — сигмоидальная функция. Был получен ряд теоретических результатов, которые характеризуют способности таких нейронных сетей по аппроксимации зависимостей. Первый из них — это апроксимационный вариант теоремы Колмогорова [1, 2], в соответствии с которой любая непрерывная функция может быть апроксимирована с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$ функциями одной переменной следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx \sum_{q=1}^{M} d_q \sigma \left(\sum_{p=1}^{N} a_{qp} \sigma \left(b_{qp} x_{i(qp)} + c_{qp} \right) + u_q \right),$$

однако N и M растут экспоненциально при $\varepsilon \to 0$.

Позже были получены интересные результаты [3], из которых следует, что любая непрерывная функция может быть апроксимирована с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$ следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx \sum_{q=1}^{4n+3} d_q \sigma \left(\sum_{p=1}^{2n+1} c_{qp} \sigma \left(\mathbf{w}_{pq} \cdot \mathbf{x} + \theta_{pq} \right) \right),$$

где σ — строго монотонная сигмоидальная бесконечно непрерывно дифференцируемая функция. Структура нейронной сети фиксирована для любой непрерывной функции f. Однако σ — катастрофически сложно устроенная функция и поэтому трудно вычислимая (т. е. сложность вычислений экспоненционально быстро растет по мере увеличения точности вычисления значения функции). Можно было бы сделать заключение, что этот результат ставит под сомнение *практическую* ценность искусственных нейронных сетей с *ограниченной структурной сложностью* (т. е. когда число нейронов в каждом слое нейронной сети зависит только от n и не зависит от ε) как универсального инструмента для апроксимации зависимостей. Однако нужно принять во внимание тот факт, что нейронная сеть построена на основе предельно упрощенной модели нейрона, которая не отражает многих особенностей преобразования сигналов в природных нейронах.

Для того чтобы преодолеть или, по крайней мере, ослабить проблему экспоненциального роста структурной сложности нейронных сетей, необходимо использовать более адекватные модели искусственных нейронов, которые лучше отражают особенности преобразования информации в природных нейронах и имеют лучшие способности по апроксимации зависимостей (например, модель $\Sigma\Pi$-нейрона, радиального нейрона и др.).

В настоящей работе предлагаются функциональные модели нейронов, которые основаны на применении *агрегирующих функций* [4, 5] для вычисления суммарного потенциала нейрона, вклада сложных синапсов и синаптических кластеров. Эти модели обобщают классические модели искусственных нейронов (в том числе $\Sigma\Pi$-нейрона), которые лежат в основе моделирования искусственных нейронных сетей. Диапазон классических моделей нейрона весьма ограничен, что накладывает ограничения на виды нейросетевых моделей, которые можно реально использовать для восстановления неизвестных зависимостей. Однако на основе аппарата *теории агрегирующих функций* можно построить широкий спектр моделей нейронов, которые, с одной стороны, существенно расширяют «номенклатуру» способов преобразования информации в искусственных нейронных сетях, а с другой стороны, лучше отражают процессы преобразования информации в природных нейронах. Кроме того, в рамках многослойной архитектуры применение аппарата теории агрегирующих функций также может позволить строить многослойные сети, содержащие модельно однородные алгоритмы в пределах одного слоя, но при этом модели алгоритмов в разных слоях могут быть принципиально отличными. Типичные примеры — это модель $\Sigma\Pi$-нейрона, модель сети со скрытым слоем из радиальных нейронов.

При обучении нейронных сетей на основе классических моделей нейронов часто приходится сталкиваться с проблемой переобучения. Одной из причин переобучения является то, что используемая модель преобразования информации является неадекватной реальному методу преобразования информации. Для ее преодоления успешно применяются композиции модулей из отдельных нейронных сетей, так же как и в методах типа boosting или bagging.

Продвигаемая в настоящей работе идея состоит в том, что агрегирующие нейроны могут использоваться в качестве базовых алгоритмов в таких композициях вместо нейронных сетей, т. е. теперь композиция может строиться не из нейронных сетей, а из агрегирующих нейронов. Это возможно из-за того, что агрегирующие нейроны могут обладать способностями по аппроксимации, которые не уступают перцептронным нейронным сетям. Так, для одного класса агрегирующих нейронов, которые обобщают $\Sigma\Pi$-нейроны, показывается, что класс таких агрегирующих нейронов является корректным в том смысле, что для любой конечной обучающей выборки можно построить агрегирующий нейрон, который будет давать правильные ответы на входах из своей обучающей выборки. Значимость корректности модели алгоритма продемонстрирована с помощью комбинаторного подхода к оценке обобщающей способности алгоритмов [6].

Сначала опишем общую схему функциональной модели нейрона, учитывающей сложные процессы обработки информации в реальных нейронах.

1 Схема функциональной модели нейрона

Пусть сегмент $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}$ (например, $[0,1]$ или $[-1,1]$) — множество значений, передаваемых между нейронами; сегмент $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}$ — множество значений полного или суммарного потенциала нейрона; $\mathrm{syn}\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{U}$ — функция преобразования *простого синапса*. Классическая модель простого синапса линейная, т. е. $\mathrm{syn}(x,w) = wx$. При построении нелинейных моделей простых синапсов можно исходить из естественного предположения, что функция преобразования простого синапса ограниченная и монотонная. Например, если $\mathbf{X} = [0,1]$, то $\mathrm{syn}(x,w) = \varphi(x-a,w)$, где $\varphi(s,w)$ — монотонно неубывающая по s, строго монотонно возрастающая по w и $\varphi(s,w) = 0 \Leftrightarrow s \leqslant 0$.

Сложный синапс рассматривается как композиция простых синапсов. Вклад сложного синапса получается в результате *нелинейного агрегирования* вкладов от простых синапсов:

$$u_k = \mathrm{Agg}_S\{u_i\colon i \in \mathbf{i}_k\},$$

где u_k — вклад k-го сложного синапса ($k = n+1,\dots,N$); u_i – вклад i-го простого синапса ($i < n$); $\mathbf{i}_k \subseteq \{1,\dots,n\}$ — набор индексов простых синапсов, входящих в k-й сложный синапс; Agg_S — агрегирующая функция для вычисления вкладов сложных синапсов.

Синаптический кластер рассматривается как композиция синапсов (простых или сложных):

$$s_l = \mathrm{Agg}_C\{u_j\colon i \in \mathbf{j}_l\},$$

s_l — вклад l-го синаптического кластера ($l = 1,\dots,m$); $\mathbf{j}_l \subset \{1,\dots,n,\dots,N\}$ — набор индексов синапсов (сложных и простых), входящих в ℓ-й синаптический кластер; Agg_C — агрегирующая функция для вычисления вкладов синаптических кластеров, которая может отличаться от Agg_S, однако если кластеры состоят из простых синапсов, то агрегирующие функции Agg_C и Agg_S, как правило, совпадают.

Суммарный потенциал нейрона получается в результате *агрегирования* вкладов от синаптических кластеров:

$$s = \mathrm{Agg}\{s_1,\dots,s_m\},$$

где $s_1,\dots,s_m$ — вклады синпатических кластеров; Agg — агрегирующая функция для вычисления суммарного потенциала нейрона, которая отличается от Agg_S, но может совпадать с Agg_C. Это хорошо иллюстрирует модель $\Sigma\Pi$-нейрона, которая рассматривается ниже. Функция выхода $\mathrm{out}\colon \mathbf{U} \to \mathbf{Y}$ задает закон преобразования суммарного потенциала нейрона в его выход.

2 Модели нейрона с простыми синапсами

Классический нейрон имеет только простые синапсы и реализует преобразование

$$y = \mathrm{out}\Big(\theta + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i\Big),$$

где w_i — вес i-го синапса. В этой модели слагаемое $w_i x_i$ соответствует преобразованию в i-м синапсе, суммарный потенциал нейрона есть арифметическая сумма вкладов простых синапсов и смещения θ.

Эта модель является частным случаем более общей модели нейрона с простыми синапсами:

$$y = \mathrm{out}\Big(\theta + \sum_{i=1}^{n} u_i\Big), \tag{1}$$

где $u_i = \mathrm{syn}(x,w,\dots)$ — нелинейная скалярная функция преобразования простого синапса, зависящая от *синаптического веса* w и, возможно, других параметров.

Естественным обобщением арифметического суммирования, которое сохраняет все его привычные алгебраические свойства, является так называемое g-суммирование [7, 8]:

$$\Big(\theta + \sum_{i=1}^{n} u_i\Big)_g = g^{-1}\Big(g(\theta) + \sum_{i=1}^{n} g(u_i)\Big),$$

где g — монотонная обратимая функция. Оно является точным аналогом взвешенного арифметического суммирования. Теорема Акцеля [9] объясняет, почему выделяется g-суммирование: всякая непрерывная и ассоциативная агрегирующая функция на сегменте представляет собой некоторое g-суммирование. Например:

$g(u)$	$\Big(\theta + \sum_{i=1}^{n} u_i\Big)_g$
$u^{\langle p\rangle} = \operatorname{sign} u\lvert u\rvert^p$	$\Big(\theta^{\langle p\rangle} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{\langle p\rangle}\Big)^{\langle 1/p\rangle}$
e^u	$\ln\Big(e^{\theta} + \sum_{i=1}^{n} e^{u_i}\Big)$
$\begin{cases} \ln u, & u > 0; \\ 0, & u = 0; \\ \ln(-u) + i\pi, & u < 0. \end{cases}$	$\theta \prod_{i=1}^{n} u_i$

Модель классического нейрона, в котором вместо обычного суммирования используется g-суммирование, принимает следующий вид:

$$y = \widetilde{\mathrm{out}}\Big(g(\theta) + \sum_{i=1}^{n} g(u_i)\Big),$$

где $\widetilde{\mathrm{out}}(s) = \mathrm{out}(g^{-1}(s))$; $u_i = \mathrm{syn}(x_i, w_i)$.

Классическую модель нейрона с простыми синапсами можно обобщить до модели нейрона агрегирующего типа с простыми синапсами вида:

$$y = \mathrm{out} \circ \mathrm{Agg}\big\{\theta, u_1, \ldots, u_n\big\},$$

где Agg — симметричная агрегирующая функция.

Классическая модель нейрона с простыми синапсами по форме идентична обобщенной линейной модели, которая имеет статистическую природу [10]. В ней функция связи соответствует функции выхода и отражает связь между математическим ожиданием целевой переменной и взвешенной линейной комбинацией предикторов. В линейной модели с нелинейным преобразованием признаков [11], наоборот, учитывается функция распределения значений входных предикторов. Объединение этих двух моделей дает обобщенную аддитивную статистическую модель, которая похожа на модель нейрона с простыми нелинейными синапсами (1).

3 Модель ΣΠ-нейрона

Примером нейрона со сложными синапсами или синаптическими кластерами является ΣΠ-нейрон. Эта модель нейрона впервые была предложена в [12] и использовалась как модель, которая отражает локальное взаимодействие входов в сложных синапсах или простых синапсов в синаптических кластерах [13]. В работах [14, 15] было показано, что модель ΣΠ-нейрона более адекватно соответствует процессам обработки информации с учетом того, что вклады сложных синапсов суммируются арифметически. Достинством этой модели является ее относительная простота и выразительность. Например, в модели ΣΠ-нейрона с функцией выхода, принимающей значения в $\{0,1\}$, можно представить любую логическую функцию. Сплайны для апроксимации непрерывных функций многих переменных можно рассматривать как ΣΠ-нейрон, на вход которого подаются сигналы, предварительно преобразованные при помощи скалярных усеченно-степенных функций. В работе [16] показано, что адекватная функциональная модель обучения нейронов коры головного мозга получается в случае, когда на вход ΣΠ-нейрона подаются сигналы, предварительно преобразованные при помощи радиальных функций. Более подробный анализ моделей со сложными синапсами и синаптическими кластерами можно найти в [17].

ΣΠ-нейрон моделирует сложные синапсы или синаптические кластеры при помощи агрегирующей функции произведения:

$$S(u_1,\ldots,u_m)=\prod_{i=1}^{m}u_i,$$

где $u_1,\ldots,u_m$ — вклады простых синапсов, входящих в сложный синапс или синаптический кластер. Суммарный потенциал по-прежнему есть арифметическая сумма вкладов синапсов и смещения θ:

$$y=\operatorname{out}\left(\theta+\sum_{k=1}^{m}\prod_{i\in\mathbf{i}_k}u_{ki}\right),$$

где $\mathbf{i}_k\subseteq\{1,\ldots,n\}$; u_{ki} — вклад i-го простого синапса в k-м сложном синапсе или синаптическом кластере. Если простые синапсы линейные ($u=wx$), то функция преобразования имеет вид:

$$y=\operatorname{out}\left(\theta+\sum_{k=1}^{m}w_k\prod_{i\in\mathbf{i}_k}x_i\right), \tag{2}$$

где $w_k=\prod\limits_{i\in\mathbf{i}_k}w_{ki}$. Такая модель ΣΠ-нейрона является корректной для класса логических функций, т. е. для любой частично определенной логической функции $f\colon\mathbf{X}\to\{0,1\}$, где $\mathbf{X}\subseteq\{0,1\}^n$, существует ΣΠ-нейрон вида (2), который вычисляет значения функции f на $\mathbf{X}$.

Модель ΣΠ-нейрона с простыми синапсами вида $u=w\varphi(x-a)$ имеет вид:

$$y=\operatorname{out}\left(\theta+\sum_{k=1}^{m}w_k\prod_{i\in\mathbf{i}_k}g_i(x_i-a_{ki})\right),$$

где $g_i(x)=0\Leftrightarrow x\leqslant 0$. В [18] доказано, что эта модель при некоторых условиях общего вида способна корректно представлять произвольные дискретные функции, определенные на конечных подмножествах $\mathbb{R}^n$, при этом конструктивный процесс обучения сопровождается процессом минимизации сложности так, чтобы в синаптическом кластере участвовало минимально возможное число простых синапсов. Важным свойством конструктивной процедуры обучения ΣΠ-нейрона является то, что она позволяет строить *множество* различных ΣΠ-нейрона по одной обучающей выборке, которые выдают на ней правильные ответы. Это дает возможность уверенно использовать их в качестве базовых алгоритмов в процедурах типа бустинга, баггинга или взвешенного голосования, так как всегда можно построить ΣΠ-нейрон, который не ошибается *более чем на половине* выборки, используя при этом в качестве обучающей *не более половины* выборки.

4 Модель нейрона с агрегирующими сложными синапсами

Модель ΣΠ-нейрона является частным случаем следующей модели нейрона со сложными синапсами:

$$y = \mathrm{out}\left(\theta + \sum_{k=1}^{m} u_k\right).$$

Здесь u_k — вклад k-го агрегирующего сложного синапса или синаптического кластера, состоящего из простых синапсов:

$$u_k = \mathrm{Agg}_\Pi\{u_i \colon i \in \mathbf{i}_k\},$$

где Agg_Π — агрегирующая функция, которая удовлетворяет требованию:

$$\mathrm{Agg}_\Pi\{u_i \colon i \in \mathbf{i}\} = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \mathbf{i} \colon u_i = 0.$$

Значительный класс таких агрегирующих функций — это *квазимультипликативные* функции:

$$\Pi_h\left\{u_i \colon i \in \mathbf{i}\right\} = h^{-1}\left(\prod_{i \in \mathbf{i}} h(u_i)\right),$$

где h — обратимая монотонная функция.

Таким образом, модель нейрона с агрегирующими ложными синапсами или синаптическими кластерами из простых синапсов имеет вид:

$$y = \mathrm{out}\left(\theta + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Agg}_\Pi\{u_{ki} : i \in \boldsymbol{i}_k\}\right). \tag{3}$$

Способности такой модели отражает следующее утверждение. Пусть out — *корректная функция выхода*, т. е. для любого $y \in \mathbf{Y}$ найдется значение s такое, что $y = \mathrm{out}(s)$.

Пусть функция простого синапса $\mathrm{syn}(x - a, w)$, такая что

1) $\mathrm{syn}(x - a, w) = 0$ только при $x \leqslant a$;
2) для любого w функция $\mathrm{syn}_w(x) = \mathrm{syn}(x - a, w)$ — монотонная;
3) для любого x функция $\mathrm{syn}_x(w) = \mathrm{syn}(x - a, w)$ — строго монотонная;
4) для любого x и любого u существует w такая, что $u = \mathrm{syn}_x(w)$.

Типичный пример: $\mathrm{syn}(x-a, w) = w\varphi(x-a)$, где φ — монотонно неубывающая функция и $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ или $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Теорема 1. *Для любого конечного и непротиворечивого набора прецедентов*[1] $\langle \widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}\rangle$ *можно построить агрегирующий нейрон*

$$\mathrm{agn}(\mathbf{x}) = \mathrm{out}\left(\theta + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Agg}_\Pi\left\{u_{ki} \colon i \in \mathbf{i}_k\right\}\right),$$

такой, что $y = \mathrm{agn}(\mathbf{x})$ *для любой пары* $\langle \mathbf{x}, y\rangle$ *из* $\langle \widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}\rangle$.

Для краткости приведем только схему конструктивного доказательства, которое следует схемам доказательств аналогичных утверждений в [18] для ΣΠ-нейронов. Набор прецедентов $\langle \widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}\rangle$ переупорядочивается так, что для любой пары $1 \leqslant j < k \leqslant N$ всегда

[1] Набор прецедентов $\langle \widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}\rangle$ является непротиворечивым, когда для любой пары $\langle \mathbf{x}', y'\rangle$ и $\langle \mathbf{x}'', y''\rangle$ из $\langle \widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}\rangle$ верно условие: если $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$, то $y' = y''$.

найдется индекс $i = i(j, k)$, такой, что $x_{ji} \leqslant x_{ki}$ ($\not\geqslant$-упорядоченность). При помощи процедуры исключения индексов, несущественных для порядка примеров в $\widetilde{\mathbf{X}}$, строится последовательность $\{\mathbf{i}_k \colon k = \overline{1, N}\}$ $(N = |\widetilde{\mathbf{X}}|)$, которая содержит минимальные наборы индексов (т. е. из любого набора $\mathbf{i}_k$ нельзя исключить какой-либо индекс так, чтобы не нарушилось свойство $\not\geqslant$-упорядоченности). В силу свойств агрегирующей функции Agg_Π последовательность функций $\{\Phi_k(\mathbf{x})\}$, где

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = \mathrm{Agg}_\Pi \left\{\mathrm{syn}(x_i - \nu(x_{ki}), w_{ki}) \colon i \in \mathbf{i}_k\right\},$$

является треугольно упорядоченной, а именно:

(1) $\Phi_j(\mathbf{x}_k) = 0$ для любой пары $j < k$;

(2) $\Phi_k(\mathbf{x}_k) \neq 0$.

Здесь $\nu(x_{ki})$ — предыдущее значение относительно x_{ki} в вариационном ряду значений $x_{1i}, \ldots, x_{Ni}$.

Затем при помощи однопроходной процедуры находятся веса w_{ki}, так что по построению $y_k = \mathrm{agn}(\mathbf{x}_k)$ для любого $k = \overline{1, N}$. Эта процедура рекуррентная, так что в процессе обучения строится последовательность $\big\{\mathrm{agn}_k(\mathbf{x}) = \mathrm{out}(\mathrm{SP}_k(\mathbf{x}))\big\}$ такая, что для любого $j = \overline{1, k}$: $y_j = \mathrm{agn}_k(\mathbf{x}_j)$, при этом

$$\mathrm{SP}_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathrm{SP}_{k-1}(\mathbf{x}), & \text{если } y_k = \mathrm{agn}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}); \\ \mathrm{SP}_{k-1}(\mathbf{x}) + w_k \Phi_k(\mathbf{x}_k), & \text{если } y_k \neq \mathrm{agn}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}), \end{cases}$$

где

$$\mathrm{SP}_k(\mathbf{x}) = \theta + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Agg}_\Pi \big\{u_{ji} \colon i \in \mathbf{i}_j\big\},\ u_{ji} = \mathrm{syn}(x_i - a_{ji}, w_{ji});$$

w_k — решение уравнения

$$y_k = \mathrm{out}\left(\mathrm{SP}_{k-1}(\mathbf{x}_k) + w_k \Phi_k(\mathbf{x}_k)\right).$$

Таким образом, получается корректный агрегирующий нейрон по построению.

Помимо квазимультипликативных функций примером агрегирующих функций сложных синапсов или синаптических кластеров из простых синапсов также могут служить квазиаддитивные функции

$$u_k = \Sigma_h \left\{u_i \colon i \in \boldsymbol{i}_k\right\} = h^{-1}\left(\sum_{i \in \boldsymbol{i}_k} h(u_{ki})\right),$$

где h — обратимая монотонная функция, например:

$h(u)$	Суммарный потенциал нейрона
$u^{\langle p \rangle}$	$\theta + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i \in \boldsymbol{i}_k} u_{ki}^{\langle p \rangle}\right)^{\langle 1/p \rangle}$
e^{pu}	$\theta + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p} \ln \left(\sum_{i \in \boldsymbol{i}_k} e^{p u_{ki}}\right)$

5 Двуслойная модель нейрона со сложными синапсами

В общем случае модель (3) агрегирующего нейрона можно обобщить, если заменить обычное суммирование вкладов сложных синапсов на симметричную агрегирующую функцию :

$$\begin{array}{l} y = \operatorname{out} \circ \operatorname{Agg}_{\Sigma} \{\theta, s_1, \ldots, s_m\}; \\ s_k = \operatorname{Agg}_{\Pi} \{u_{ki} \colon i \in \boldsymbol{i}_k\}, \quad k = \overline{1, m}, \end{array} \tag{4}$$

где $\operatorname{Agg}_{\Sigma}$ — агрегирующая функция для вычисления суммарного потенциала нейрона, такая что

(1) если $s_{k'} = 0$, то $\operatorname{Agg}_{\Sigma}\{s_k \colon k \in \mathbf{k}\} = \operatorname{Agg}_{\Sigma}\{s_k \colon k \in \mathbf{k}'\}$, где $\mathbf{k}' = \mathbf{k} \setminus \{k'\}$;

(2) для любого $\operatorname{Agg}_{\Sigma}\{s_1, \ldots, s_M\}$, любого S найдется s_{M+1} такая, что

$$\operatorname{Agg}_{\Sigma}\{s_1, \ldots, s_M, s_{M+1}\} = S.$$

Примерами такой агрегирующей функции являются квазиаддитивные функции вида:

$$\operatorname{Agg}_{\Sigma}\{s_1, \ldots, s_M\} = h^{-1}\left(\sum_{k=1}^{M} w_k h(s_k)\right).$$

В этих предположениях и предположениях Теоремы 1 в части простых синапсов имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого конечного и непротиворечивого набора прецедентов* $\langle \widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}} \rangle$ *можно построить агрегирующий нейрон* $\operatorname{agn}(\mathbf{x})$ *вида* (4) *такой, что* $y = \operatorname{agn}(\mathbf{x})$ *для любой пары* $\langle \mathbf{x}, y \rangle$ *из* $\langle \widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}} \rangle$.

Доказательство этой теоремы идентично доказательству Теоремы 1. Особенность заключается только в том, что агрегирующая операция $\operatorname{Agg}_{\Sigma}$, по приведенному выше определению, обладает всеми необходимыми свойствами, которыми обладает операция обычного суммирования и которые непосредственно и используются при доказательстве Теоремы 1 и поэтому формальная ее замена на $\operatorname{Agg}_{\Sigma}$ обеспечивает истинность Теоремы 2.

6 Заключение

В настоящей работе описаны новые классы моделей нейронов агрегирующего типа, которые включают в себя большинство функциональных моделей нейронов, в том числе со сложными синапсами (нейроны перцептронного типа, сигма-пи нейроны, радиальные нейроны). Они существенно расширяет «номенклатуру» типов моделей нейронов, на основе которых можно строить нейронные сети. Для одного подкласса таких моделей, которые обобщают ΣΠ-нейроны, доказана способность по корректному представлению функций, определенных на конечном множестве.

В дальнейшем предстоит теоретическое и экспериментальное исследование возможностей моделей агрегирующих нейронов по апроксимации различных типов зависимостей. Поскольку модели ΣΠ-нейронов и их обобщения показали хорошие способности по представлению многих типов зависимостей [18–20], то таких же способностей можно ожидать и от моделей агрегирующих нейронов в общем случае.

Также предстоит еще исследовать эффект от применения различных классов агрегирующих функций как для агрегирования вкладов в сложных синапсах и синаптических кластерах, так и для агрегирования всех вкладов в суммарный потенциал нейрона на качество и сложность аппроксимации зависимостей.

Литература

[1] *Kurkova V.* Kolmogorov's theorem is relevant // Neural Comput., 1991. Vol. 3. P. 617–622.

[2] *Kurkova V.* Kolmogorov's theorem and multilayer neural networks // Neural Networks, 1992. Vol. 5. P. 501—506.

[3] *Maiorov V., Pinkus A.* Lower bounds for approximation by MLP neural networks // Neurocomputing, 1999. Vol. 25. P. 81–91.

[4] *Mesiar R., Komornikova M., Kolesarova A., Calvo T.* Aggregation functions: A revision // Fuzzy sets and their extensions: Representation, aggregation and models / Eds. H. Bustince, F. Herrera, J. Montero. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2008. C. 121–144.

[5] *Grabich M., Marichal J.-L., Pap E.* Aggregation functions. — Encyclopedia of mathematics and its applications ser. — Cambridge University Press, 2009. No. 127. 482 p.

[6] *Воронцов К. В.* Комбинаторный подход к оценке качества обучаемых алгоритмов // Математические вопросы кибернетики / Под ред. О. Б. Лупанова. — М.: Физматлит, 2004. Т. 13. С. 5–36.

[7] *Pap E.* *g*-calculus. Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak., Ser. Mat., 1993. Vol. 23. No. 1. P. 145–150.

[8] *Pap E.* Applications of the generated pseudo-analysis on nonlinear partial differential equations. Vienna, 2004. Preprint ESI 1448. 22 p.

[9] Aczél J. Lectures on functional equations and their applications. — New York, NY, USA: Academic Press, 1966. P. 253–273.

[10] *McCullagh P., Nelder J.* Generalized linear models. — 2nd ed. — Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1989. 532 p.

[11] *Hasti T., Tibshirani R.* Generalized additive models // Stat. Sci., 1986. Vol. 1. No. 3. P. 297–318.

[12] *Feldman J. A., Ballard D. H.* Connectionist models and their properties // Cognitive Sci., 1982. No. 6. P. 205–254.

[13] *Rumelhart D. E., Hinton G., Williams R.* Learning internal representation by error propagation // Parallel distributed processing. Vol. 1: Foundations. — Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1986. P. 318–362.

[14] *Mel B. W.* The sigma-pi column: A model of associative learning in cerebral neocortex. Pasadena, CA, USA: California Institute of Technology, 1990. Cns Memo No. 6: Technical Report.

[15] *Mel B. W.* The sigma-pi model neuron: Roles of the dendritic tree in associative learning // Soc. NeuroSci. Abstr., 1990. Vol. 16. P. 205.4.

[16] *Mel B. W, Koch C.* Sigma-pi learning: on radial basis functions and cortical associative learning // Advances in neural information processing systems / Ed. D. S. Touretzky. — San Mateo, CA, USA: Morgan Kaufmann, 2000. Vol. 2. P. 474–481.

[17] *Mel B. W.* Why have dendrites? A computational perspective // Dendrites / Eds. G. Stuart, N. Spruston, M. Hausser. — 2nd ed. — Oxford University Press, 2007. P. 271–289.

[18] *Шибзухов З. М.* Конструктивные методы обучения ΣΠ-нейронных сетей. — М: МАИК Наука, 2006. 159 с.

[19] *Шибзухов З. М.* Рекуррентный метод конструктивного обучения некоторых сетей алгебраических ΣΠ-нейронов и ΣΠ-нейромодулей // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003. № 43. С. 1298–1310.

[20] *Шибзухов З. М.* О некоторых конструктивных и корректных классах алгебраических ΣΠ-алгоритмов // Докл. РАН, 2010. Т. 432. С. 465–468.

Поступила в редакцию 29.05.2014

References

[1] Kurkova, V. 1991. Kolmogorov's theorem is relevant. *Neural Comput.* 3:617–622.

[2] Kurkova, V. 1992. Kolmogorov's theorem and multilayer neural networks. *Neural Networks* 5:501–506.

[3] Maiorov, V., and A. Pinkus. 1999. Lower bounds for approximation by MLP neural networks. *Neurocomputing* 25:81–91.

[4] Mesiar, R., M. Komornikova, A. Kolesarova, and T. Calvo. 2008. Aggregation functions: A revision. *Fuzzy sets and their extensions: Representation, aggregation and models*. Eds. Bustince, H., F. Herrera, and J. Montero. Berlin–Heidelberg: Springer. 121–144.

[5] Grabich, M., J.-L. Marichal, and E. Pap. 2009. *Aggregation functions*. Encyclopedia of mathematics and its applications ser. Cambridge University Press. No. 127. P. 482 p.

[6] Vorontsov, K. V. 2004. Kombinatornyy podkhod k otsenke kachestva obuchaemykh algoritmov. *Matematicheskie voprosy kibernetiki*. Ed. O. B. Lupanov. Moscow: Fizmatlit. 13:5–36.

[7] Pap, E. 1993. g-calculus. *Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak., Ser. Mat.* 23(1):145–150.

[8] Pap, E. 2004. Application of the generated pseudo-analysis on nonlinear partial differential equations. Vienna. Preprint ESI 1448. 22 p.

[9] Aczél, J. 1966. Lectures on functional equations and their applications. New York, NY: Academic Press. 253–273.

[10] McCullagh, P., and J. Nelder. 1989. *Generalized linear models*. 2nd ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC. 532 p.

[11] Hasti, T., and R. Tibshirani. 1986. Generalized additive models. *Stat. Sci.* 1(3):297–318.

[12] Feldman, J. A., and D. H. Ballard. 1982. Connectionist models and their properties. *Cognitive Sci.* 6:205–254.

[13] Rumelhart, D. E., G. Hinton, and R. Williams. 1986. Learning internal representation by error propagation. *Parallel distributed processing. Vol. 1: Foundations.* Cambridge, MA: MIT Press. 318–362.

[14] Mel, B. W. 1990. The sigma-pi column: A model of associative learning in cerebral neocortex. Pasadena, CA: California Institute of Technology. Cns Memo No. 6: Technical Report.

[15] Mel, B. W. 1990. The sigma-pi model neuron: Roles of the dendritic tree in associative learning. *Soc. NeuroSci. Abstr.* 16:205.4.

[16] Mel, B. W, and C. Koch. 2000. Sigma-pi learning: On radial basis functions and cortical associative learning. *Advances in neural information processing systems*. Ed. D. S. Touretzky. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann. 2:474–481.

[17] Mel, B. W. 2007. Why have dendrites? A computational perspective. *Dendrites*. 2nd ed. Eds. G. Stuart, N. Spruston, and M. Hausser. Oxford University Press. 271–289.

[18] Shibzukhov, Z. M. 2006. Konstruktivnie metody obucheniya ΣΠ-neyronnykh setey. Moscow: MAIK Nauka. 159 p.

[19] Shibzukhov, Z. M. 2003. Rekurrentnyy metod konstruktivnogo obucheniya nekotorykh setey algebraicheskikh ΣΠ-neyronov i ΣΠ-neyromoduley. *Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki* 43:1298–1310.

[20] Shibzukhov, Z. M. 2010. O nekotorykh konstruktivnykh i korrektnykh klassakh algebraicheskikh ΣΠ-algoritmov. *Dokl. RAN* 432:465–468.

Received May 29, 2014