Динамическая модель организации грузоперевозок*

Л. А. Бекларян, Н. К. Хачатрян
beklar@cemi.rssi.ru; nerses@cemi.rssi.ru
ЦЭМИ РАН, Москва, Россия

Исследуется модель, описывающая процесс грузоперевозок, реализуемый в рамках ряда технологий. Рассматриваются четыре варианта модели. Первый вариант описывает транснациональные транспортные перевозки, т. е. перевозки без выделенных начальной станции отправления и конечной станции распределения грузов. Второй вариант описывает транспортные перевозки с выделенной начальной станцией отправления грузов. Третий вариант описывает транспортные перевозки с выделенными начальной станцией отправления и конечной станцией распределения грузов. Четвертый вариант описывает транспортные перевозки по круговой цепочке станций. Для всех вариантов модели изучаются режимы грузоперевозок, удовлетворяющие заданной системе контроля. Такие режимы описываются решениями типа бегущей волны для нелинейного конечно-разностного аналога уравнения параболического типа. Описаны возможные режимы грузоперевозок, исследован вопрос устойчивости стационарных режимов.

Ключевые слова: *нелинейный конечно-разностный аналог параболического уравнения; решения типа бегущей волны; устойчивость; динамические модели грузоперевозок*

DOI: 10.21469/22233792.1.13.04

Dynamic model of organization of cargo transportation*

L. A. Beklaryan and N. K. Khachatryan
CEMI RAS, 47 Nachimovky prospect, Moscow, Russia

The model describing the process of cargo transportation realized through a number of technologies is investigated. Four versions of the model are considered. The first version of the model describes the transnational cargo transportation without dedicated initial departure station and the final station cargo distribution. This version of the model describes the cargo, for which both the first and the last stations are not nodes. For such cargo transportation, it is important to describe the rule of interaction of intermediate stations. The second version of the model describes the transport cargo with a dedicated initial departure station. This version of the model describes the cargo on the long section of the route where the initial departure station is nodular. The role of the station is the most significant problem in the organization of cargo and, therefore, it has extra capacity. For such cargo transportation, it is important to describe the rule of interaction between the first station and intermediate stations, as well as the rule of interaction between intermediate stations. The third version of the model describes the cargo transportation between dedicated initial departure station and final station. This version of the model describes the cargo on the long section of the route between the two node stations. In the problem of transport cargo organization, node stations play the most important role; therefore, they have additional capacity. For such cargo transportation, it is important to describe the rules of interaction of nodal stations with intermediate stations and the rules of interaction between intermediate stations. The fourth version of the model describes the cargo transportation in a circular chain of stations. For all versions of the model, the modes of freight satisfying given control system are studied. Such regimes are described by traveling wave type

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-51-05011.

solutions of nonlinear finite-difference analogue of a parabolic equation. The possible modes of freight are described, the issue of stability of stationary regimes is investigated.
Keywords: *nonlinear finite-difference analogue of a parabolic equation; cargo transportation models; traveling wave type solutions*

DOI: 10.21469/22233792.1.13.04

1 Введение

Среди проблем, связанных с работой транспорта, центральное место занимают задачи планирования и организации грузоперевозок. Впервые методы нахождения оптимального плана перевозок в нашей стране были предложены в 1930-х гг. В 1939 г. Л. В. Канторовичем [1] математически описана транспортная задача линейного программирования. Им же определен целый класс задач, близких к транспортной, предложен алгоритм для решения транспортной задачи, названный методом разрешающих множителей. В 1949 г. Л. В. Канторович и М. К. Гавурин опубликовали работу [2], в которой решалась транспортная задача с ограничениями на пропускные способности. Используя идеи общего метода Л. В. Канторовича, для решения задач линейного программирования был разработан метод потенциалов. Через год этот же метод был предложен Дж. Данцигом и Ф. Вольфом [3]. В то же время в Советском Союзе А. Л. Лурье [4] был предложен метод решения транспортной задачи путем приближения условно-оптимальными планами. В 1985 г. О. И. Авен, С. Е. Ловецкий и Г. Е. Моисеенко опубликовали работу [5], посвященную проблемам оптимального планирования и управления транспортными потоками на транспортных сетях. Были рассмотрены математические модели транспортных сетей и транспортных потоков (однородный транспортный поток, поток с усилениями и ослаблениями, поток нескольких видов на транспортной сети с ограниченной пропускной способностью звеньев, динамический транспортный поток).

Другой важной задачей, связанной с работой транспорта, является организация грузоперевозок. Такая задача рассмотрена в [6–14]. Сеть грузоперевозок на железнодорожном транспорте представляет собой большую сложную систему, моделирование которой связано с дополнительными трудностями из-за сложности сети дорог и многообразия движения поездов. При исследовании характеристик системы железнодорожных грузоперевозок в целом целесообразно использовать грубые модели, в которые вводятся существенные аппроксимации, а ряд деталей не учитывается. В то же время при детальном исследовании изолированных участков сети используется точная модель, в которой связи данного участка с другими более или менее опускаются и детально исследуется только этот участок. При этом не следует упускать из виду отклонение модели от реальной сети в первом случае и недоучет связей участков во втором. Создавать модель, которая точно представляет все детали, бессмысленно, поскольку это приводит к необоснованному усложнению процесса ее проектирования, поэтому при моделировании всегда используется ряд аппроксимаций реальных характеристик движения поездов.

Данная работа посвящена детальному изучению процесса организации грузоперевозок в целом. В ней построена и исследована динамическая модель организации грузоперевозок на протяженном участке пути с большим количеством промежуточных станций, через которые проходит грузопоток. Предполагается, что между двумя соседними станциями существует межстанционный перегонный путь, где временно может храниться часть грузов. Емкость перегонных путей считаем неограниченной. Движение грузов происходит в одном направлении. На произвольную промежуточную станцию груз может поступать как с предыдущей станции, так и с перегонного пути, расположенного между ними. Аналогично с произвольной промежуточной станции груз может быть отправлен либо на следующую станцию, либо на перегонный путь, расположенный между ними. Рассматриваются четыре варианта модели.

2 Модель транснациональных грузоперевозок

Такая модель описывает движение грузопотока без выделенных начальной станции отправления и конечной станции распределения грузов, вследствие чего считаем, что число промежуточных станций бесконечно как в правую, так и в левую стороны. Работа всех станций состоит из приема, обработки и отправки грузов, а сами станции имеют заданную пропускную способность. Под пропускной способностью понимаем максимальный объем грузов, который может пройти через промежуточную станцию за единичный отрезок времени. Обработка грузов происходит в узлах станций. В каждый момент времени число задействованных узлов на n-й станции обозначим через $z_n(t)$. В каждом узле в течение единицы времени обрабатывается единичный объем грузов. Очевидно, что количество задействованных узлов обработки грузов при бесперебойной работе всей цепи перевозок ограничено. Максимальное количество таких узлов, обозначаемое через Δ, определяет пропускную способность станций. Организация подобных грузопотоков зависит от технологий по приему, обработке и отправлению грузов. Опишем эти технологии.

Первая технология основана на установленных нормативных правилах взаимодействия соседних станций. Для каждой станции с номером i существуют правила взаимодействия с предыдущей $(i-1)$-й станцией и последующей $(i+1)$-й станцией. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией станция с номером i увеличивает количество задействованных узлов с интенсивностью $\alpha(z_{i-1}-z_i)$, если количество задействованных узлов на ней меньше, чем на предыдущей станции. При этом грузопоток принимается с предыдущей станции. В противном случае станция с номером i уменьшает количество задействованных узлов с такой же интенсивностью и грузопоток отправляется на перегонный путь.

Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией станция с номером i уменьшает количество задействованных узлов с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i+1})$, если количество задействованных узлов на ней больше, чем на следующей станции. При этом грузопоток отправляется на следующую станцию. В противном случае станция с номером i увеличивает количество задействованных узлов с такой же интенсивностью и грузопоток принимается с перегонного пути.

Первая технология не учитывает условие ограниченности пропускной способности станций. Кроме того, она не позволяет использовать весь потенциал станций. В связи с этим, наряду с первой технологией, используется и иная технология.

Вторая технология позволяет как увеличить число задействованных узлов (если оно меньше Δ), так и уменьшать (если оно превышает Δ). При этом груз принимается с перегонного пути либо отправляется на перегонный путь. Функция $\varphi(\cdot)$, задающая скорость изменения числа задействованных узлов в рамках второй технологии, имеет вид, изображенный на рис. 1.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий скорость изменения числа задействованных узлов для i-й станции будет описываться дифференциальным уравнением:

$$\dot{z}_i(t) = \alpha(z_{i-1} - z_i) - \alpha(z_i - z_{i+1}) + \varphi(z_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{1}$$

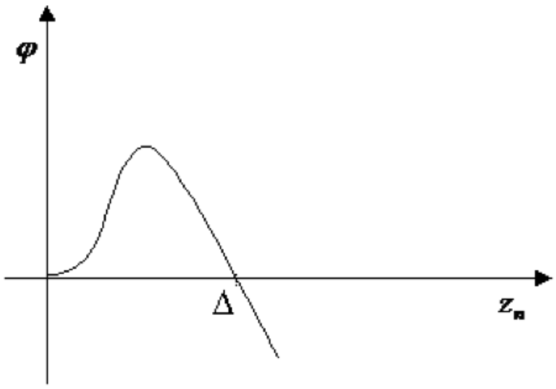


Рис. 1 Скорость изменения числа задействованных узлов (вторая технология)

Для грузоперевозок необходимо иметь действенную и простую систему контроля. Она заключается в том, что объемы обрабатываемых грузов для любого планового интервала времени на всех станциях должны совпадать с определенным лагом времени, единым для всех станций. Такое условие можно описать в следующем виде: существует число $\tau > 0$, не зависящее от t и i, такое, что при всех $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in [0, +\infty)$ выполняется равенство:

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau). \tag{2}$$

Решения системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющие условию (2), называются решениями типа бегущей волны. Константу τ, которая является сдвигом между моментами замеров и сравнения объемов грузов, будем называть характеристикой системы контроля. Таким образом, данная модель, описывающая процесс грузоперевозок и их систему контроля, задается счетной системой дифференциальных уравнений и условием, задающим бегущую волну:

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, +\infty); \tag{3}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{4}$$

Определение 1 [10]. Семейство абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{Z}}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется решением системы дифференциальных уравнений (3), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют этой системе. ■

Для любого $\mu \in (0, 1)$ определим банаховы пространства (пространства функций с весами)

$$\mathcal{L}^1_\mu C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ \ \max_{0\leqslant r\leqslant k} \sup_{t\in R} \left\| x^{(r)}(t) e^{-\delta|t|} \right\|_{\mathbb{R}} < +\infty \right\}, \ k = 0, 1, \ldots, \quad \mu = e^{-\delta}$$

и нормой

$$\|x\|^{(k)}_\mu = \max_{0\leqslant r\leqslant k} \sup_{t\in R} \left\| x^{(r)}(t) e^{-\delta|t|} \right\|_{\mathbb{R}},$$

а также векторное пространство $K^1 = \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{R}_i, \ \mathbb{R}_i = \mathbb{R}, \ i \in \mathbb{Z}$ с элементами $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \ x_i \in \mathbb{R}, \ i \in \mathbb{Z}$, и со стандартной топологией полного прямого произведения.

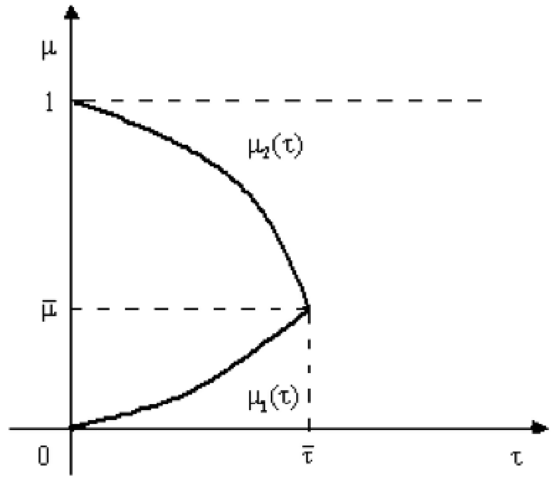


Рис. 2 Функции $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$

В пространстве K^1 определим семейство гильбертовых подпространств

$$K^1_{2\mu} = \left\{ \varkappa : \varkappa \in K^1; \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|^2_R \mu^{2|i|} < +\infty \right\}, \quad \mu \in (0,1),$$

с нормой

$$\|\varkappa\|_{2\mu} = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|^2_R \mu^{2|i|} \right]^{1/2}.$$

Обозначим

$$M(\tau) = \tau \max[2\alpha, L_0]$$

и рассмотрим неравенство относительно двух переменных $\tau \in (0,+\infty)$ и $\mu \in (0,1)$

$$M(\tau)[1+2\mu^{-1}] < \ln \mu^{-1}, \qquad \mu \in (0,1). \tag{5}$$

Множество решений неравенства (5) описывается функциями $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$, изображенными на рис. 2.

Теорема 1 [10]. *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, начального момента времени $\bar{t} \in [0,+\infty)$ и характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$, существует решение $\{z_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ уравнения (3) типа бегущей волны (условие (4)) с характеристикой τ, удовлетворяющее начальному условию $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$. Более того, в таком решении для всякого $i \in \mathbb{Z}$ функция $z_i(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}([0,+\infty))$ при любом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$. Такое решение является единственным и непрерывно зависит от начального условия a, каждая координата $z_i(\cdot)$, $i \in \mathbb{Z}$, непрерывно зависит от начального условия a как элемент пространства $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}([0,+\infty))$.* ■

Система (3)–(4) имеет два стационарных решения типа бегущей волны: $\bar{z}_1 \equiv \{\cdots, 0, 0, 0, \cdots\}$, $\bar{z}_2 \equiv \{\cdots, \Delta, \Delta, \Delta, \cdots\}$. Очевидно, что такие решения принадлежат пространству $K^1_{2\mu}$ при любом $\mu \in (0,1)$.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\mu^2 - (2\alpha + \delta)\mu + \alpha = 0, \tag{6}$$

где $\delta = -\varphi'(\Delta)$. Решениями уравнения (6) являются $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\tilde{\lambda}}$, причем $0 < \tilde{\lambda} < 1$, $\tilde{\tilde{\lambda}} > 1$.

Определение 2 [10]. Стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$, называется устойчивым по Ляпунову, если существуют $\gamma > 0$ и $\bar{t} \geqslant 0$ такие, что для произвольного $d \in K^1_{2\mu}$, удовлетворяющего условию $\|d - \bar{z}\|_{2\mu} < \gamma$, решение $z(t)$ уравнения (3) с начальным условием $z(\bar{t}) = d$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_1 < \gamma$ такое, что при $\|d - \bar{z}\|_{2\mu} < \sigma_1$ решение $z(t)$ уравнения (3) с начальным условием $z(\bar{t}) = d$ удовлетворяет условию $\|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar{t}$.

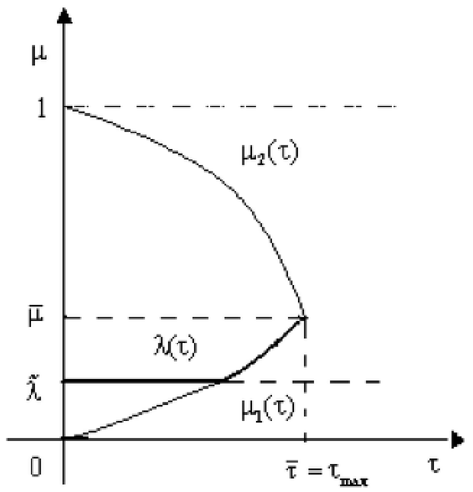
Устойчивое по Ляпунову стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$, называется асимптотически устойчивым, если $\lim\limits_{t\to+\infty} \|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} = 0$. ■

Теорема 2 [10]. *Для любых $\alpha, \delta > 0$ и характеристик $\tau \in (0, +\infty)$ стационарное решение $\bar{z}_2 = \{\cdots, \Delta, \Delta, \Delta, \cdots\}$ уравнения (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\tilde{\lambda}, 1)$, является асимптотически устойчивым, а стационарное решение $\bar{z}_1 = \{\cdots, 0, 0, 0, \cdots\}$ в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$, является неустойчивым.* ■

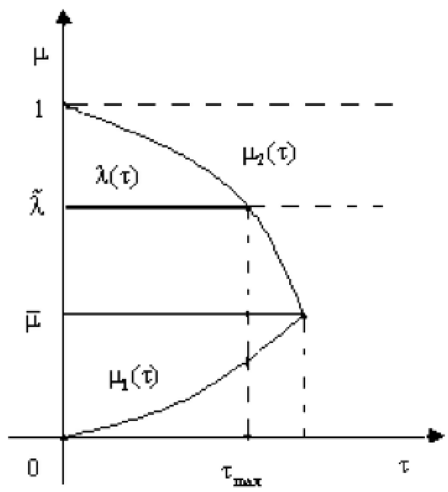
Обозначим

$$\tau_{\max} = \sup\{\tau : \tau \leqslant \bar{\tau},\ \mu_2(\tau) \geqslant \tilde{\lambda}\}.$$

На интервале $(0, \tau_{\max}]$ определяется функция $\lambda(\tau) = \max(\tilde{\lambda}, \mu_1(\tau))$, графически изображенная на рис. 3 (при $\tilde{\lambda} < \bar{\mu}$ — на рис. 3, *а* и при $\tilde{\lambda} > \bar{\mu}$ — на рис. 3, *б*).



(*а*)



(*б*)

Рис. 3 Функция $\lambda(\tau)$: (а) $\tilde{\lambda} < \overline{\mu}$; (б) $\tilde{\lambda} > \overline{\mu}$

Определение 3 [10]. Стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\bar{z}_i = \bar{z}_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, типа бегущей волны системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$, называется устойчивым по Ляпунову среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ, если:

оно устойчиво по Ляпунову; существуют $\gamma > 0$ и $\bar{t} \geqslant 0$ такие, что для произвольного числа d_0, удовлетворяющего условию $|d_0 - \bar{z}_0| < \gamma$, решение $z(t) = \{z_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ системы (3)–(4) с начальным условием $z_0(\bar{t}) = d_0$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_2 < \gamma$ такое, что из условия $|d_0 - \bar{z}_0| < \sigma_2$ следует, что решение $z(t)$ системы (3)–(4) с начальным условием $z_0(\bar{t}) = d_0$ удовлетворяет условию $||z(t) - \bar{z}||_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar{t}$. ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3 [10]. *Для любых $\alpha, \delta > 0$ и характеристик $\tau \in (0, \tau_{\max})$ стационарное решение $\bar{z}_2 = \{\cdots, \Delta, \Delta, \Delta, \cdots\}$ системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\lambda(\tau), \mu_2(\tau))$ является асимптотически устойчивым среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ.* ■

3 Модель грузоперевозок с выделенной начальной станцией отправления грузов

В предыдущем разделе была рассмотрена модель транснациональных транспортных перевозок, где предполагалось, что множество промежуточных станций бесконечно как в правую, так и в левую стороны. В данном разделе рассмотрим модель транспортных перевозок с выделенной начальной станцией отправления грузов. Итак, рассмотрим модель транспортных перевозок с начальной станцией отправления грузов $i = 0$ и большим количеством промежуточных станций $i = 1, 2, \ldots$ Так же, как и в первой модели, организация грузопотока осуществляется посредством двух технологий.

Первая технология. На станциях с номерами $i = 1, 2, ...$ действует первая технология, описанная в предыдущем параграфе. На начальной станции $i = 0$ первая технология определяется с помощью правила взаимодействия с последующей станцией и правила подачи грузов на нее, определяемая функцией $\psi(t)$, зависящей от переменной времени $t \geqslant 0$. Предполагаем, что функция $\psi(\cdot)$ является кусочно бесконечно дифференцируемой. Так как начальная станция является узловой, то естественно предположить, что она обладает большими мощностями и при необходимости на ней можно резко изменять число задействованных узлов, чего нельзя сделать на промежуточных станциях.

Вторая технология. Для произвольной станции с номером $i = 1, 2, ...$ вторая технология в точности повторяет вторую технологию, описанную в предыдущем разделе. Для начальной станции $i = 0$ вторая технология из предыдущего параграфа используется только для разгрузки, поэтому скорость изменения числа задействованных узлов обработки на начальной станции в рамках второй технологии описывается функцией $\varphi_0(t)$, зависящей от количества задействованных узлов на начальной станции, и удовлетворяет следующим условиям: на полупрямой $(-\infty, \Delta]$ тождественно равна нулю, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ является убывающей функцией. Предполагаем, что функции $\varphi_0(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ (определенная в предыдущем параграфе) являются бесконечно дифференцируемыми. Очевидно, что при объеме грузов на 0-й станции, не превышающем Δ, используется только первая технология.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий, а также системы контроля, процесс грузоперевозок будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l}
\dot{z}_0(t) = \psi(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty); \\
\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, +\infty); \\
z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, ..., \quad t \in [0, +\infty).
\end{array}\right\} \qquad (7)$$

Класс решений системы (7) чрезвычайно узок, поэтому для описания реализуемых режимов грузоперевозок используется более широкий класс решений, которые называются квазирешениями типа бегущей волны. Эти решения являются кусочно абсолютно непрерывными, а разрывы расположены в точках, кратных характеристике системы контроля (параметр τ). Приведем точное определение.

Определение 4 [10]. Семейство кусочно абсолютно непрерывных функций $\{z_i(.)\}_0^{+\infty}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется квазирешением типа бегущей волны с характеристикой $\tau > 0$ для системы (7), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют этой системе, а разрывы расположены в точках, кратных числу τ. ■

Теорема 4 [10]. *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, \ldots\}$, начального момента времени $\bar{t} \in [0, +\infty)$, характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$ (см. рис. 2) и функций $\psi(\cdot) \in C^\infty([0, \tau], \mathbb{R})$ на полупрямой $(\tau, +\infty)$ существует единственное кусочно непрерывное продолжение функции $\psi(\cdot)$ и соответсвующее ему квазирешение $\{z_i(\cdot)\}_0^{+\infty}$ типа бегущей волны с характеристикой τ системы (7) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, удовлетворяющее начальному условию $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$. Такое квазирешение является единственным и непрерывно зависит от начального условия a и функции $\psi(\cdot)$.* ■

В содержательном плане это означает, что на всех станциях в моменты времени, кратные характеристике системы контроля, необходимо резко менять число задействованных узлов. Данная процедура требует подключения дополнительных мощностей, которые имеются только на узловой (начальной) станции. Оказывается, что достаточно лишь на начальной станции в начальный период времени резко изменить число задействованных узлов (слегка изменить функцию $\psi(\cdot)$ в норме $L_1([0, \tau], \mathbb{R})$), чтобы организовать контролируемый грузопоток с помощью определенных выше технологий (получить так называемое ε квазирешение, т. е. такое квазирешение, у которого указанные разрывы меньше ε).

Определение 5 [10]. Квазирешение типа бегущей волны с характеристикой τ называется ε-квазирешением типа бегущей волны с характеристикой τ или (ε, τ)-квазирешением, если выполняются неравенства:

$$|z_0(k\tau - 0) - z_0(k\tau + 0)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots \ ■$$

Теорема 5 [10]. *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, \ldots\}$, начальных моментов времени $\bar{t} \in [0, +\infty)$, характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$, произвольной функции $\psi(\cdot) \in C^\infty([0, \tau], \mathbb{R})$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует функция $\psi_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty([0, \tau], \mathbb{R})$, отличная от $\psi(\cdot)$ в малой окрестности точки 0 такая, что ее продолжение на $(\tau, +\infty)$ и соответствующее ему квазирешение $\{z_{i\varepsilon}(\cdot)\}_0^{+\infty}$ типа бегущей волны с характеристикой τ системы (7), удовлетворяет начальному условию $z_{\bar{i}\varepsilon}(\bar{t}) = a$, принадлежит фазовому пространству $K^1_{2\mu}$ при любом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ и является (ε, τ)-квазирешением.* ■

4 Модель грузоперевозок с выделенными начальной станцией отправления и конечной станцией распределения грузов

Рассмотрим модель транспортных перевозок с начальной станцией отправления грузов $i = 0$, конечным числом промежуточных станций $i = 1, 2, \ldots, m$ и конечной станцией распределения грузов $i = m + 1$. Так же, как и в предыдущих моделях, организация грузопотока осуществляется посредством двух технологий.

Первая технология. На станциях с номерами $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ действует технология, описанная раннее. Технология подачи грузов на начальную станцию описывается функцией $\psi_1(t)$, $t \geqslant 0$. На конечной станции первая технологии определяется с помощью правила взаимодействия с предыдущей станцией и правилом распределения грузов с нее, описываемая функцией $\psi_2(t)$, $t \geqslant 0$. Предполагаем, что функция $\psi_1(\cdot)$ является кусочно бесконечно дифференцируемой, а функция $\psi_2(\cdot)$ — кусочно непрерывной.

Вторая технология. Для начальной и промежуточных станций вторая технология в точности повторяет вторую технологию, описанную в предыдущих параграфах. Вторая технология для конечной станции такая же, как для промежуточных станций.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий, а также системы контроля прием и отправка грузов будут описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{rcll} \dot z_0(t) & = & \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0)\,, & & t \in [0, +\infty); \\ \dot z_i(t) & = & \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i)\,, & i = 1, 2, \ldots, m\,, & t \in [0, +\infty); \\ \dot z_{m+1}(t) & = & \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1})\,, & & t \in [0, +\infty); \\ z_i(t) & = & z_{i+1}(t+\tau)\,, & i = 0, 1, 2, \ldots, m\,, & t \in [0, +\infty). \end{array}\right\} \quad (8)$$

Класс решений системы (8) также чрезвычайно узок и для описания реализуемых режимов грузоперевозок используются квазирешения (имеются разрывы в точках, кратных характеристике системы контроля) типа бегущей волны.

Теорема 6 [10]. *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar i \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$, начального момента времени $\bar t \in [0, +\infty)$, характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar\tau$, (см. рис. 2) и функций $\psi_1(\cdot) \in C^\infty([0, \tau], \mathbb{R})$ и $\psi_2(\cdot) \in C([0, \tau], \mathbb{R})$ существуют единственные кусочно непрерывные продолжения функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ и соответствующее им квазирешение $\{z_i(\cdot)\}_0^{m+1}$ типа бегущей волны с характеристикой τ системы (8) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, удовлетворяющее начальному условию $z_{\bar i}(\bar t) = a$. Такое квазирешение является единственным и непрерывно зависит от начального условия a и функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$.* ■

Оказывается, что так же, как и для предыдущей модели (с выделенной начальной станцией отправления грузов), с помощью резкого изменения числа задействованных узлов на начальной станции в начальный период времени можно организовать контролируемый грузопоток (получить ε-квазирешение).

Теорема 7 [10]. *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar i \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$, начальных моментов времени $\bar t \in [0, +\infty)$, характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar\tau$, произвольных функций $\psi_1(\cdot) \in C^\infty([0, \tau], R)$ и $\psi_2(\cdot) \in C([0, \tau], R)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует функция $\psi_{1\varepsilon}(\cdot) \in C^\infty([0, \tau], R)$, отличная от $\psi_1(\cdot)$ в малой окрестности точки 0, такая, что продолжения функций $\psi_{1\varepsilon}(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ на $(\tau, +\infty)$ и соответсвующее им квазирешение $\{z_{i\varepsilon}(\cdot)\}_0^{m+1}$ типа бегущей волны с характеристикой τ системы (8) удовлетворяет начальному условию $z_{\bar i\varepsilon}(\bar t) = a$, принадлежит фазавому пространству $K^1_{2\mu}$ при любом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ и является (ε, τ)-квазирешением.* ■

5 Модель грузоперевозок по круговой цепочке станций

Вернемся к первому варианту модели. Напомним, что этот вариант модели описывает транснациональные транспортные грузоперевозки без выделенных начальной станции отправления и конечной станции распределения грузов. Рассмотрим частный случай такой модели, а именно: модель транспортных грузоперевозок по круговой цепочке, состоящей из n станций. Для исследования данной модели необходимо изучить решения системы (3)–(4), удовлетворяющие следующему дополнительному условию:

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0,\ +\infty).$$

Таким образом, данная модель описывается следующей системой:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), && i \in Z, && t \in [0, +\infty); \\ z_i(t) &= z_{i+n}(t), && i \in Z, && t \in [0, +\infty); \\ z_i(t) &= z_{i+1}(t+\tau), && i \in Z\,, && t \in [0, +\infty). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [14]. *Если* $\{\bar{z}_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *является решением системы* (9)*, то для произвольного* $i \in Z$ *функция* $\bar{z}_i(\cdot)$ *периодическая с периодом* τn*.* ■

Очевидно, что разрешимость системы (9) зависит от разрешимости следующей конечномерной системы:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \alpha z_n - 2\alpha z_1 + \alpha z_2 + \varphi(z_1), && && t \in [0, +\infty); \\ \dot{z}_i(t) &= \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), && i = 2, \ldots, n-1, && t \in [0, +\infty); \\ \dot{z}_n(t) &= \alpha z_{n-1} - 2\alpha z_n + \alpha z_1 + \varphi(z_n)\,, && && t \in [0, +\infty); \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} z_i(t) &= z_{i+1}(t+\tau), && i = 1, \ldots, n-1\,, && t \in [0, +\infty)\,; \\ z_n(t) &= z_1(t+\tau)\,, && && t \in [0, +\infty)\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Итак, согласно лемме 1, если система (10)–(11) имеет решение, то оно будет периодическим с периодом τn. Одним из таких решений является стационарное решение $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$. Для выявления других решений (если они существуют) изучим все решения системы дифференциальных уравнений (10) (т. е. не только решения типа бегущей волны, удовлетворяющие условиям (11)).

Теорема 8 [14]. *Для произвольных* $\alpha > 0$ *и* $\delta > 0$ *всякое решение системы дифференциальных уравнений* (10) *с координатами начального значения, бóльшими 0, ограничено. Более того, каждая координата решения снизу ограничена нулем, а сверху асимптотически ограничена значением* Δ*.* ■

Теорема 9 [14]. *Стационарное решение* $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$ *системы дифференциальных уравнений* (10) *локально устойчиво по Ляпунову по первому приближению.* ■

Для определения области устойчивости указанного решения система дифференциальных уравнений (10) была решена численно с помощью метода Рунге–Кутта 4-го порядка. Результаты численных экспериментов сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 1 [14]. *Для любых* $\alpha > 0$ *и* $\delta > 0$ *областью устойчивости стационарного решения* $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$ *системы дифференциальных уравнений* (10) *является положительный ортант, т. е. всякое решение системы дифференциальных уравнений* (10) *с положительными координатами начального значения сходится к стационарному решению* $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$*.* ■

Из теоремы 8 и утверждения 1 следует, что всякое решение системы дифференциальных уравнений (10) с положительными координатами начального значения ограничено и, более того, сходится к стационарному решению $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$. Следовательно, других периодических решений, кроме стационарного решения $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$, система дифференциальных уравнений (10) с положительными координатами начального значения не имеет. Это, в свою очередь, означает, что система (10)–(11) с положительными координатами начального значения, кроме стационарного решения $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$, не имеет других решений. Таким образом, исходная система (9) с положительными координатами начального значения имеет единственное решение типа бегущей волны, а именно: стационарное решение $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$.

Литература

[1] *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. 68 с.

[2] *Канторович Л. В., Гавурин М. К.* Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта: Сб. научн. статей. — М.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 110–138.

[3] *Данциг Дж., Вольф Ф.* Алгоритм разложения для задач линейного программирования // Математика: Сб. переводов, 1964. Т. 8. №1. С. 151–160.

[4] *Лурье А. Л.* Алгоритм решения сетевой транспортной задачи с ограничением пропускных способностей методом условно-оптимальных планов // Мат-лы Конф. по опыту и перспективам применения математических методов и ЭММ в планировании. — Новосибирск, 1962. С. 3–13.

[5] *Авен О. И., Ловецкий С. Е., Моисеенко Г. Е.* Оптимизация транспортных потоков. — М.: Наука, 1985. 166 с.

[6] *Козовский И. Г.* Рационализация перевозок грузов на железных дорогах. — М.: Транспорт, 1977. 280 с.

[7] *Галабурда В. Г.* Совершенствование технологии перевозок и увеличение пропускной способности железных дорог. — М.: МИИТ, 1983. 124 с.

[8] *Галабурда В. Г.* Оптимальное планирование грузопотоков. — М.: Транспорт, 1985. 256 с.

[9] *De Jong G., Gunn H. F., Walker W.* National and international freight transport models: An overview and ideas for further development // Transport Rev., 2004. Vol. 24. No. 1. P. 103–124.

[10] *Beklaryan L. A., Khachatryan N. K.* Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional Differential Equations, 2006. Vol. 13. No. 2. P. 125–155.

[11] *Рубцов А. О., Тарасов А. С.* Моделирование железнодорожных перевозок на территории России // Тр. Института системного анализа Российской академии наук, 2009. Т. 46. С. 274–278.

[12] *Yamada T., Russ B. F., Castro J., Taniguchi E.* Designing multimodal freight transport networks: A heuristic approach and applications // Transportation Sci., 2009. Vol. 43. No. 2. P. 129–143.

[13] *Левин Д. Ю.* Моделирование процессов перевозки // Мир транспорта, 2010. Т. 8. №5(33). С. 48–55.

[14] *Бекларян Л. А., Хачатрян Н. К.* Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013. Т. 53. №10. С. 1649–1667.

Поступила в редакцию 15.06.2015

References

[1] Kantorovich, L. V. 1939. *Mathematical methods of organizing and planning production.* Leningrad: Leningrad State University. 68 p. (In Russian.)

[2] Kantorovich, L. V., and M. K. Gavurin. 1949. Application of mathematical methods to the analysis of freight flows. *Problems of raising the efficiency of transport performance.* Moscow: USSR Acad. Sci. 110–138. (In Russian.)

[3] Dantzig, G. B., and P. Wolfe. 1964. Decomposition principle for linear programs. *Oper. Res.* 8:101–111.

[4] Lurie, A. L. 1962. Algorithm for solving the restricted-capacity network transportation problem with by the method of conditionally optimal plans. *Conference on Experience and Prospects of Applying Mathematical Methods and Computers in Planning Proceedings.* Novosibirsk. 3–13. (In Russian.)

[5] Aven, O. I., S. E. Lovetskii, and G. E. Moiseenko. 1985. *Optimization of traffic flows*. Moscow: Nauka. 166 p. (In Russian.)

[6] Kozovskii, I. G. 1977. *Improvement of railroad good transportation*. Moscow: Transport. 280 p. (In Russian.)

[7] Galaburda, V. G. 1983. *Improvement of transportation techniques and increase in railroad traffic capacity*. Moscow: Mosk. Inst. Inzh. Transporta. 124 p. (In Russian.)

[8] Galaburda, V. G. 1985. *Optimal planning of good transportation*. Moscow: Transport. 256 p. (In Russian.)

[9] De Jong, G., H. F. Gunn, and W. Walker. 2004. National and international freight transport models: An overview and ideas for further development. *Transport Rev.* 24(1):103–124.

[10] Beklaryan, L. A., and N. K. Khachatryan. 2006. Traveling wave type solutions in dynamic transport models. *Functional Differential Equations* 13(2):125–155.

[11] Rubtsov, A. O, and A. S. Tarasov. 2009. Modeling of rail transport in Russia. *Proceedings of ISA RAS* 46:274–278. (In Russian.)

[12] Yamada, T., B. F. Russ, J. Castro, and E. Taniguchi. 2009. Designing multimodal freight transport networks: A heuristic approach and applications. *Transportation Sci.* 43(2):129–143.

[13] Levin, D. Yu. 2010. Modeling of railway freightage. *World of Transport and Transportation* 8(5(33)):48–55. (In Russian.)

[14] Beklaryan, L. A., and N. K. Khachatryan. 2013. On one class of dynamic transportation models. *Comp. Math. Math. Phys.* 53(10):1649–1667.

Received June 15, 2015