# Комбинированная нелинейная фильтрация цифровых изображений большой разрядности

#### Е.П. Петров, Н.Л. Харина, Е.Д. Ржаникова ерреtrov@mail.ru

#### ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров

Синтезирован алгоритм нелинейной фильтрации многоразрядных цифровых изображений (ЦИ), передаваемых многопозиционными фазоманипулированными (ФМ) импульсными сигналами, что позволяет сократить время передачи ЦИ. Синтезированный алгоритм реализует пространственную и межразрядную статистическую избыточность многоразрядных ЦИ для компенсации потерь помехоустойчивости при переходе от двухпозиционных ФМ сигналов к многопозиционным ФМ сигналам. В комбинации с медианной фильтрацией алгоритм нелинейной фильтрации многоразрядных ЦИ может подавлять не только белый гауссовский шум (БГШ), но и импульсные помехи, борьба с которыми медианной фильтрацией при наличии БГШ неэффективна.

Ключевые слова: цифровое изображение; нелинейная фильтрация; цепь Маркова DOI: 10.21469/22233792.1.13.06

## Combined nonlinear filtration of digital halftone high bitness images

#### E. P. Petrov, N. L. Kharina, and E. D. Rzhanikova

Vyatka State University, 36 Moskovskaya st., Kirov, Russia

The requirement for transfer of a large volume of information, such as a multibit digital images (DI), more quickly is an actual task and demands perfecting of radiocommunication means. One of the ways of reduction of a DI transfer time is transition to a multiphase frequency modulation (FM) signals. However, their application is limited because of a noise stability loss at each division of a phase in comparison with binary FM signals. At the transfer of DI by the eight-phase FM signals, the time is reduced by four times, but with partial compensation of a noise stability loss. The algorithm of restoration of a multibit DI distorted by white Gaussian noise (WGN) is developed. The statistical redundance of the DI is efficiently used for compensation of a noise stability loss at the transfer of digital images by multiphase FM signals. For example, the time of the DI transfer by four-phase signals was reduced twice without noise stability loss in comparison with the DI transfer by the binary FM signals. The combined algorithm of filtration of multidigit DI is constructed. It consists of two algorithms: a nonlinear filtration of DI distorted by WGN and the median filter for restoration of DI distorted by salt-pepper impulse noise. Due to separation of impulse noise and WGN, the impulse noise is efficiently suppressed by the median filter. The results of such combination allow to reduce transfer time of a multibit DI and to strive successfully against WGN and impulse noise.

Keywords: digital image; nonlinear filtering; Markov chain

**DOI:** 10.21469/22233792.1.13.06

### 1 Введение

При прямой передаче многоразрядных ЦИ по каналу связи с помехами, например, БГШ и импульсными помехами типа «перец-соль», требуются большие временные и энергетические ресурсы. Сократить первое и второе можно, если для передачи ЦИ использовать многофазные ФМ (МФМ) сигналы, а потери помехоустойчивости, возникающие при этом, скомпенсировать полностью или частично реализацией статистической избыточности ЦИ.

Для решения этой задачи необходимо синтезировать алгоритм нелинейной фильтрации ЦИ в присутствии БГШ с импульсными помехами, которые могут быть подавлены, например, медианным фильтром, подключенным к выходу синтезированного нелинейного фильтра, т. е. необходимо разработать алгоритм комбинированной нелинейной фильтрации ЦИ при наличии БГШ и импульсных помех, в котором неизвестным является алгоритм нелинейной фильтрации ЦИ, передаваемого МФМ импульсными сигналами, основным показателем которого является эффективная реализация статистической избыточности, для повышения помехоустойчивости приема ЦИ.

Будем полагать, что *g*-разрядное ( $g \ge 8$ ) ЦИ является марковским случайным полем (МСП) с  $2^g$  дискретными состояниями (градациями яркости). Для синтеза алгоритма фильтрации ЦИ необходимо построить математическую модель (ММ) многоразрядного ЦИ.

#### 2 Постановка задачи

Необходимо разработать алгоритм нелинейной фильтрации ЦИ, эффективно использующий статистическую избыточность ЦИ для повышения качества восстановления ЦИ, искаженных БГШ n(t) с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_n^2$ .

## Математическая модель многоразрядного цифрового изображения

Будем полагать, что *g*-разрядное ЦИ состоит из *g* разрядных двоичных изображений (РДИ), каждое из которых МСП — двумерная цепь Маркова с двумя равновероятными  $(p_1 = p_2)$  состояниями (рис. 1).

Для решения задачи сокращения времени передачи многоразрядных ЦИ объединим в *g*-разрядном ЦИ соседние РДИ в равные группы. Например, в 16-разрядном ЦИ можно образовать группы по 2 (рис. 2, *a*) или 4 соседних РДИ. На рис. 2, *б* представлена группа из двух старших РДИ 16-разрядного ЦИ, в каждом столбце которой два бинарных пикселя могут принимать четыре равновероятных ( $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$ ) состояния. В результате объединения двух РДИ получаем групповое разрядное ЦИ (ГРЦИ) с четырьмя градациями яркости.

Передачу ГРЦИ можно осуществлять четырехфазными импульсными сигналами. Схема образования ГРЦИ и переход от двоичной фазовой манипуляции к квадратурной показан на рис. 3. Применение МФМ сигналов для передачи ГРЦИ вместо РДИ позволяет сократить время передачи ЦИ в число раз, равное числу РДИ в ГРЦИ, поскольку за одну единицу времени по радиоканалу передается не один бит информации, как при двоичной фазовой манипуляции, а несколько, например два в случае объединения двух РДИ.

Если РДИ — двумерная цепь Маркова с двумя состояниями [1], то будем полагать ГРЦИ двумерной цепью Маркова с вектором вероятностей из N начальных состояний

$$P = \left\| p_1, \quad p_2, \quad \dots, \quad p_n \right\|^{\mathrm{T}}$$

$$\tag{1}$$

и матрицами вероятностей перехода (МВП) из *i*-го состояния в *j*-е за один шаг:

$${}^{1}\Pi = \|{}^{1}\pi_{ij}\|_{N \times N}; \quad {}^{2}\Pi = \|{}^{2}\pi_{ij}\|_{N \times N}, \quad i \neq j.$$

$$(2)$$



Рис. 1 Представление ЦИ набором независимых РДИ

m	0	1	1 (	о <sup>.</sup>	1 (	)	1 (	о <sup>.</sup>	1 (	)	1 (	)	1 (	) (	0	1 (	)	1 (	) (	о <sup>,</sup>	1 (	5		16 разряд ЦИ
	0	0	1	- 1	0	- 1	0	- 1	0	- 1	0	- 1	0	1	0	0	- 1	0	1	0	0	1	0	15 20025 1114
	0	(0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	тэ разряд ци
	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	
	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	
n	0	(0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	
		0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	

(a)Разрядное двоичное изображение — 15 и 16 разрядов



 $(\delta)$ Групповое разрядное ЦИ, полученное объединением РДИ



Элементы МВП (2) удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{j=1}^{N} {}^{q} \pi_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad q = \overline{1, 2},$$

и стационарности

$$p_i = \sum_{j=1}^N p_j \pi_{ij}, \quad i = \overline{1, N}.$$

На рис. 4, *а* приведена модель ГРЦИ [2], удовлетворяющая априорно заданным: вектору (1) и МВП (2). Реализация модели и ее адекватность реальным ЦИ подробно исследована в работах [1,3]. Размер окрестности элемента  $M_{ij}$  можно взять произвольным, но ее увеличение приводит к сложным двумерным цепям Маркова [2] и практически мало улучшает качество искаженного шумом ЦИ [4], поэтому выбираем окрестность вида рис. 4, *б*.



Рис. 3 Переход от двоичной к квадратурной фазовой манипуляции



**Рис.** 4 Математическая модель ЦИ (*a*) и окрестность элемента изображения (*б*)

Предположим, что в 16-разрядном ЦИ ГРЦИ состоит из двух РДИ и каждый фильтруемый элемент  $M_{i,j}$  ГРЦИ (см. рис. 4, *a*) зависит только от соседних ранее известных элементов ГРЦИ, образующих окрестность  $\Lambda_{i,j}$  элемента  $\nu_4$ , где приняты обозначения:  $\nu_1 = M_{i,j-1}, \nu_2 = M_{i-1,j}, \nu_3 = M_{i-1,j-1}$  [2]. Для ГРЦИ из двух РДИ вероятности перехода от комбинаций состояний элементов окрестности  $\Lambda_{i,j}$  к элементу  $\nu_4$  (см. рис. 4,  $\delta$ ) образуют МВП вида:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{iii} & \pi_{iji} & \pi_{iki} & \pi_{ili} & \pi_{jii} & \pi_{jji} & \pi_{jki} & \pi_{jli} & \cdots & \pi_{lii} & \pi_{lji} & \pi_{lki} & \pi_{lli} \\ \pi_{iij} & \pi_{ijj} & \pi_{ikj} & \pi_{ilj} & \pi_{jij} & \pi_{jjj} & \pi_{jkj} & \pi_{jlj} & \cdots & \pi_{lij} & \pi_{ljj} & \pi_{lkj} & \pi_{llj} \\ \pi_{iik} & \pi_{ijk} & \pi_{ikk} & \pi_{ilk} & \pi_{jik} & \pi_{jjk} & \pi_{jkk} & \pi_{jlk} & \cdots & \pi_{lik} & \pi_{ljk} & \pi_{lkk} & \pi_{llk} \\ \pi_{iil} & \pi_{ijl} & \pi_{ikl} & \pi_{ill} & \pi_{jil} & \pi_{jjl} & \pi_{jkl} & \pi_{jll} & \cdots & \pi_{lil} & \pi_{ljl} & \pi_{lkl} & \pi_{lll} \\ \end{pmatrix} .$$
(3)

Элементы первого столбца МВП П (3) связаны с элементами матриц (2) следующими соотношениями (остальные вычисляются аналогично):

$$\pi_{iii} = \frac{1\pi_{ii}^{2}\pi_{ii}}{3\pi_{ii}}; \quad \pi_{iij} = \frac{1\pi_{ij}^{2}\pi_{ij}}{3\pi_{ii}}; \quad \pi_{iik} = \frac{1\pi_{ik}^{2}\pi_{ik}}{3\pi_{ii}}; \quad \pi_{iil} = \frac{1\pi_{il}^{2}\pi_{il}}{3\pi_{ii}};$$
$$\pi_{iji} = \frac{1\pi_{ij}^{2}\pi_{ji}}{3\pi_{ij}}; \quad \pi_{ijj} = \frac{1\pi_{ij}^{2}\pi_{jj}}{3\pi_{ij}}; \quad \pi_{ijk} = \frac{1\pi_{ik}^{2}\pi_{jk}}{3\pi_{ij}}; \quad \pi_{ijl} = \frac{1\pi_{il}^{2}\pi_{jl}}{3\pi_{ij}};$$

где  ${}^{3}\pi_{ii}$  — элементы дополнительной матрицы  ${}^{3}\Pi = {}^{1}\Pi \times {}^{2}\Pi^{T}$ , связывающей  $\nu_{3}$  с  $\nu_{4}$ .

## 4 Синтез алгоритма нелинейной фильтрации многоразрядных цифровых изображений

Пусть ГРЦИ многоразрядного ЦИ передаются по каналу связи четырехфазными ФМ сигналами при наличии БГШ n(t) с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_n^2$ .

Используя теорию фильтрации условных марковских процессов с дискретными аргументами [5], синтезируем алгоритмы нелинейной фильтрации многоразрядных ЦИ, представленных ГРЦИ.

Опуская процедуру синтеза алгоритма нелинейной фильтрации ГРЦИ, которая аналогична процедуре синтеза алгоритмов нелинейной фильтрации РДИ [1,3], запишем систему рекуррентных уравнений нелинейной фильтрации ГРЦИ, представляющего двумерную цепь Маркова с четырьмя состояниями в виде [4,7]:

$$\begin{aligned} u_{1}\left(\nu_{4}\right) &= \left[f\left(M_{1}\left(\nu_{4}\right)\right) - f\left(M_{4}\left(\nu_{4}\right)\right)\right] + u_{1}\left(\nu_{1}\right) + z_{1}\left(u\left(\nu_{1}\right), {}^{1}\pi_{ij}\right) + \\ &+ u_{1}\left(\nu_{2}\right) + z_{1}\left(u\left(\nu_{2}\right), {}^{2}\pi_{ij}\right) - u_{1}\left(\nu_{3}\right) - z_{1}\left(u\left(\nu_{3}\right), {}^{3}\pi_{ij}\right); \\ u_{2}\left(\nu_{4}\right) &= \left[f\left(M_{2}\left(\nu_{4}\right)\right) - f\left(M_{4}\left(\nu_{4}\right)\right)\right] + u_{2}\left(\nu_{1}\right) + z_{2}\left(u\left(\nu_{1}\right), {}^{1}\pi_{ij}\right) + \\ &+ u_{2}\left(\nu_{2}\right) + z_{2}\left(u\left(\nu_{2}\right), {}^{2}\pi_{ij}\right) - u_{2}\left(\nu_{3}\right) - z_{2}\left(u\left(\nu_{3}\right), {}^{3}\pi_{ij}\right); \\ u_{3}\left(\nu_{4}\right) &= \left[f\left(M_{3}\left(\nu_{4}\right)\right) - f\left(M_{4}\left(\nu_{4}\right)\right)\right] + u_{3}\left(\nu_{1}\right) + z_{3}\left(u\left(\nu_{1}\right), {}^{1}\pi_{ij}\right) + \\ &+ u_{3}\left(\nu_{2}\right) + z_{3}\left(u\left(\nu_{2}\right), {}^{2}\pi_{ij}\right) - u_{3}\left(\nu_{3}\right) - z_{3}\left(u\left(\nu_{3}\right), {}^{3}\pi_{ij}\right), \end{aligned}$$

где  $u_j(\nu_4) = \ln [p_j(\nu_4)/p_4(\nu_4)]$  — апостериорная вероятность дискретного параметра МФМ импульсных сигналов, адекватных состояниям элементов ГРЦИ;  $[f(M_i(\nu_4)) - f(M_4(\nu_4))]$ ,  $i = \overline{1,3}$ , — разность логарифмов функции правдоподобия состояний дискретного параметра МФМ импульсных сигналов (элементов ГРЦИ);  $z_j(\cdot)$  — нелинейная функция вида:

$$z_{j}\left(u\left(\nu_{l}\right),^{l}\pi_{ij}\right) = \ln\left[\frac{\sum_{i=1,i\neq j}^{3}\left\{\exp\left(u_{i}\left(\nu_{l}\right)-u_{j}\left(\nu_{l}\right)\right)^{l}\pi_{ij}+\exp\left(-u_{j}\left(\nu_{l}\right)\right)^{l}\pi_{ij}+\pi_{jj}\right\}\right]}{\sum_{i=1}^{3}\left\{\exp\left(u_{j}\left(\nu_{l}\right)\right)^{l}\pi_{i4}\right\}+\pi_{44}}$$
$$\left(j=\overline{1,3},l=\overline{1,3}\right).$$
 (4)

Вся априорная информация о статистической зависимости состояний элементов ГРЦИ сосредоточена в слагаемых вида (4), где  ${}^{l}\pi_{ij}$ ,  $(i, j = \overline{1, 4}, l = \overline{1, 3})$  — элементы матриц <sup>1</sup>П, <sup>2</sup>П и <sup>3</sup>П.

В качестве критерия различения состояний элементов ГРЦИ принят критерий максимума логарифма отношения апостериорных вероятностей  $u_j(\nu_4)$   $(j = \overline{1,3})$ , в соответствии с которым, если

$$u_j(\nu_4) > u_i(\nu_4) , \quad i, j = \overline{1,3}, \ i \neq j,$$

то принимается решение о состоянии элемента изображения  $\nu_4 = M_j$ , если все значения  $u_j (\nu_4) < 0 \ (j = \overline{1,3})$ , то принимается решение о состоянии элемента изображения  $\nu_4 = M_4$ .

## 5 Комбинированный алгоритм фильтрации многоразрядных цифровых изображений

Для борьбы с импульсными помехами часто применяют медианную фильтрацию, которая при наличии БГШ неэффективна, а параметрическая нелинейная фильтрация не подавляет импульсные помехи, а, напротив, выделяет их из БГШ как мелкие объекты в многоразрядных ЦИ. Поэтому целесообразным является разделение функций, выполняемых и той, и другой нелинейными фильтрациями, т. е. вначале фильтруем ЦИ, состоящее из ГРЦИ, при наличии БГШ, а затем к выделенным из шума импульсным помехам применяем медианную фильтрацию. При этом алгоритм фильтрации приобретает комбинированный характер, обеспечивая эффективное подавление обеих помех.

В совокупности с медианным фильтром разработанный нелинейный фильтр образует комбинированный нелинейный фильтр (рис. 5), который позволяет успешно бороться с БГШ и импульсными помехами [7].



Рис. 5 Схема комбинированного нелинейного фильтра

## 6 Результаты исследования

Анализ результатов нелинейной фильтрации показывает, что снижение помехоустойчивости приема ЦИ, вызванное переходом к МФМ импульсным сигналам, удается полностью скомпенсировать применением разработанного алгоритма за счет использования статистической избыточности, содержащейся в цифровых изображениях.

Ниже приведен пример работы комбинированного нелинейного фильтра. На рис. 6 представлено исходное тестовое 16-разрядное ЦИ. На рис. 7, *а* представлен фрагмент тестового изображения, передаваемого четырехфазными сигналами и искаженного БГШ при отношении сигнал/шум по мощности  $\rho^2 = -6$  дБ.

На рис. 7, *в* показан фрагмент ЦИ при передаче четырехфазными сигналами на выходе нелинейного фильтра, а на рис. 7, *∂* — на выходе комбинированного фильтра. На рис. 7, *b*, 7, *г* и 7, *е* приведены результаты нелинейной и комбинированной фильтрации ЦИ, передаваемого бинарными сигналами. Для оценки качества фильтрации были вычислены значения среднеквадратической ошибки (СКО) ЦИ на входе и выходе нелинейного и комбинированного фильтров. В результате фильтрации ЦИ, передаваемого бинарными



Рис. 6 Исходное изображение

сигналами, значение СКО уменьшилось в 7–8 раз, при фильтрации ЦИ, передаваемого четырехфазными сигналами, — в 12 раз.

## 7 Заключение

Переход от ЦИ к ГРЦИ, передаваемых четырехкратными ФМ сигналами, позволил сократить время передачи 16-разрядного ЦИ в 2 раза и полностью скомпенсировать за счет реализации статистической избыточности ГРЦИ бо́льшую часть потерь в помехоустойчивости, вызванных переходом от двухкратных ФМ сигналов для передачи РДИ в ЦПИ к четырехкратным ФМ сигналам для передачи ЦИ из ГРЦИ.

## Литература

- [1] *Петров Е. П., Трубин И. С., Частиков И. А.* Нелинейная фильтрация видеопоследовательностей цифровых полутоновых изображений марковского типа // Успехи современной радиоэлектроники, 2007. № 3. С. 54–87.
- [2] Петров Е. П., Харина Н. Л., Ржаникова Е. Д. Математическая модель цифровых полутоновых изображений на основе цепей Маркова с несколькими состояниями // Нелинейный мир, 2013. Т. 11. № 7. С. 487–492.
- [3] Петров Е. П., Харина Н. Л., Рэканикова Е. Д. Синтез и исследование алгоритмов фильтрации дискретных марковских процессов с несколькими состояниями // Радиотехнические и телекоммуникационные системы, 2013. № 1. С. 60–66.
- [4] Петров Е. П., Харина Н. Л., Харюшин В. Ф. Математические модели и алгоритмы фильтрации цифровых полутоновых изображений на основе сложных цепей Маркова // Цифровая обработка сигналов, 2012. № 3. С. 52–57.
- [5] *Амиантов И. Н.* Избранные вопросы статистической теории связи. М: Советское радио, 1971. 416 с.
- [6] *Петров Е. П., Харина Н. Л., Рэсаникова Е. Д.* Нелинейная фильтрация изображений на основе цепей Маркова с несколькими состояниями // Мат-лы III Всеросс. НТК «Актуальные проблемы ракетно-космической техники». Самара, 2013. С. 154–163.



(а) Зашумленное ЦИ, передаваемое четырехфазны- (б) Зашумленное ЦИ, передаваемое бинарными сигми сигналами ( $-6 \ \text{дБ}$ ), CKO =  $2.84 \cdot 10^8$ 



налами (-6 дБ), CKO =  $3.09 \cdot 10^8$ 



(в) Восстановленное ЦИ, передаваемое четырехфаз- (г) Восстановленное ЦИ, передаваемое бинарными ными сигналами,  $\mathrm{CKO} = 0.22 \cdot 10^8$ 



сигналами,  $CKO = 0.39 \cdot 10^8$ 



(д) Цифровое изображение, передаваемое четырех- (е) Цифровое изображение, передаваемое бинарныфазными сигналами, на выходе комбинированного ми сигналами, на выходе комбинированного фильтфильтра,  $\mathrm{CKO}=0,\!11\cdot10^8$ 



pa, CKO =  $0.10 \cdot 10^8$ 

Рис. 7 Пример работы комбинированного фильтра

[7] Медведева Е.В., Метелев А.П. Метод комбинированной нелинейной фильтрации коррелированных видеоизображений // Нелинейный мир, 2010. № 11. С. 677–684.

### References

- Petrov, E. P., I. S. Trubin, and I. A. Chastikov. 2007. Non-linear filtration of video sequences of digital halftone images of Markov type. Uspekhi sovremennoi radioelektroniki 3:54–87.
- [2] Petrov, E. P., N. L. Kharina, and E. D. Rzhanikova. 2013. Mathematical model of digital halftone images based on Markov chains with several states. Nonlinear World 11(7):487–492.
- [3] Petrov, E. P., N. L. Kharina, and E. D. Rzhanikova. 2013. Synthesis and analysis of algorithms for filtering of discrete Markov processes with several states. *Radiotechnical Telecommunication* Syst. 1:60–66.
- [4] Petrov, E. P., N. L. Kharina, and V. F. Kharyushin. 2012. Mathematical models and filtration algorithms of digital halftone images based on complex Markov chains. *Digital Signal Processing* 3:52–57.
- [5] Amiantov, I. N. Selected questions of the statistical theory of communication. Moscow: Sovetskoe Radio. 314 p.
- [6] Petrov, E. P., N. L. Kharina, and E. D. Rzhanikova. 2013. Non-linear image filtration based on Markov chains with several states. 3rd All-Russian Scientific and Technical Conference "Actual Problems of the Missile and Space Equipment" Proceedings. Samara. 154–163.
- [7] Medvedeva, E. V., and A. P. Metelev. 2010. Method of combined non-linear filtration of correlated video images. Nonlinear World 11:677–684.

Received June 15, 2015