Математический формализм субъективного моделирования*

Ю. П. Пытьев, О. В. Фаломкина, С. А. Шишкин, А. И. Чуличков
yuri.pytyev@gmail.com; olesya.falomkina@gmail.com; darkshish@gmail.com; achulichkov@gmail.com
МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1

Создан математический формализм субъективного моделирования неопределенности, отражающей недостоверность субъективной информации и нечеткости, свойственной ее содержанию, позволяющий моделировать неформализованные, неполные и недостоверные знания, начиная с «абсолютного незнания» вплоть до «точного знания» модели объекта исследования, когда созданный формализм эквивалентен «стандартному» математическому моделированию. Если исследователю доступны данные наблюдений за объектом, то формализм позволяет эмпирически проверять адекватность субъективной модели цели исследования, корректировать субъективную модель, и при определенных условиях – эмпирически восстанавливать модель объекта исследования.

Основой субъективного моделирования является предлагаемое исследователем пространство с мерами правдоподобия и доверия, характеризующими модальности его субъективных суждений об истинности значений неизвестного параметра, определяющего модель объекта исследования («неизвестным параметром» может быть и вся модель). Применение предложенного формализма иллюстрируется решением задачи восстановления математической модели данных измерений температуры водоема, полученных в заданные моменты времени. При решении задачи использован научный опыт исследователя, его интуиция и субъективные представления о математической модели измерения температуры воды, но при этом математические модели датчика температуры и погрешности измерений не известны. Предполагается, что результатом измерения является искаженный шумом временной ряд значений температуры, при этом математическая модель шума априори неизвестна и должна быть восстановлена на основе научного опыта и интуиции исследователя, так же как и математическая модель временной зависимости температуры. Искомая субъективная математическая модель измерений выделяется из параметрического семейства сглаживающих сплайнов и их ортогональных дополнений. В работе восстановлена модель измерений и получены оптимальные оценки гладкой временной зависимости температуры и ортогонального шумового остатка.

Ключевые слова: *мера правдоподобия; мера доверия; восстановление модели; сглаживающий сплайн; неопределенность.*

DOI: 10.21469/22233792.4.2.04

1 Введение

Дополнительная информация об изучаемом объекте может существенно увеличить точность решения задач анализа и интерпретации данных [1, 2]. Как правило, имеющиеся у исследователя субъективные представления об объекте исследования, основанные на научном опыте, являются трудно формализуемыми и требуют особого математического аппарата для их учёта. Различные подходы к созданию такого аппарата описаны в работах [3–14].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № №17-07-00832 и 18-07-00424.

Существенно отличается от них подход, предложенный в работах Ю. П. Пытьева [15–19]. Математический формализм субъективного моделирования предложен в этих работах как метод моделирования неполной и недостоверной информации о возможных значениях неизвестного параметра $x \in X$, определяющего модель $M(x)$ объекта исследования, выраженной в форме субъективных суждений модельера-исследователя. Этот подход позволяет моделировать неформализованные, неполные и недостоверные знания, начиная с «абсолютного незнания» модели объекта исследования вплоть до «точного знания» этой модели. Поскольку «точное знание» модели эквивалентно условию применимости «стандартного» математического моделирования, предложенный подход существенно обобщает «стандартное» математическое моделирование.

Если исследователю доступны данные наблюдений за объектом, то предлагаемый подход позволяет ему эмпирически проверить адекватность субъективной модели цели исследования, скорректировать субъективную модель и, при определенных условиях, эмпирически восстановить модель объекта исследования.

Использованный в работе математический формализм субъективного моделирования существенно отличается от предложенных в работах [3,8–12] методов моделирования субъективных суждений и позволяет:

1) построить универсальную субъективную модель «полного незнания» свойств модели объекта исследования, которая не зависит от модели измерений и от мощности множества элементарных событий, в отличие от моделей «полного незнания» в монографиях [3, 9];

2) разработать методы эмпирического построения и верификации модели субъективных суждений, предложенной м.-и., в отличие от формализма модальной логики [8];

3) сформулировать модель субъективных суждений на основе упорядоченности значений правдоподобий и доверий элементарных высказываний, а не их численных значений [3, 8–12].

Настоящая работа опирается на этот подход, в ней рассмотрен математический формализм субъективного моделирования и приведены примеры решения задачи восстановления математической модели измерений температуры воды в открытом водоеме в терминах сглаживающих сплайнов.

2 Меры правдоподобия и доверия. Неопределенный элемент

Математический формализм субъективного моделирования, о котором идет речь в настоящей работе, позволяет исследователю, в отличие от «стандартного» математического моделирования, полностью учитывать как формализованные точные знания об исследуемом объекте, свойственные «стандартному» математическому моделированию, так и неформализованные и недостоверные знания, выразив математически своё отношение к их истинности, указав, насколько относительно правдоподобны его суждения и насколько следует относительно доверять их отрицаниям.

Неполноту и недостоверность неформализованных знаний модели $M(x)$ объекта исследователь выражает как неполноту и недостоверность знания истинного значения неизвестного параметра $x \in X$, определяющего модель, высказанного в форме его субъективных суждений, которым свойственны как

1. неясность и неопределённость, отражающие неполноту, противоречивость и недостоверность субъективных знаний (меры правдоподобия Pl и доверия Bel), так и
2. неточность, нечёткость, случайность и т.п., свойственные их содержанию (меры возможности P, необходимости N, вероятности Pr) [16–19].

Неизвестным параметром может быть вся модель объекта исследования.

Математическую модель субъективных суждений исследователь задает как пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, где $\mathcal{P}(X)$ – множество всех подмножеств X, $\widetilde{x}$ – неопределенный элемент со значениями в X, моделирующий неизвестный $x \in X$. Меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ моделируют модальности субъективных суждений исследователя об истинности каждого $x \in X$: значение $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ определяет, насколько, по его мнению, относительно правдоподобно равенство $\widetilde{x} = x$, а значение $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ определяет, насколько следует относительно доверять неравенству $\widetilde{x} \neq x$. «Относительно» здесь означает, что численные значения Pl и Bel, отличные от нуля и единицы, не важны, имеет смысл лишь их упорядоченность. $M(\widetilde{x})$ далее обозначает субъективную модель изучаемого объекта.

Рассмотрим пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в котором $\mathcal{P}(X)$ – класс всех подмножеств X, меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to L$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widehat{L}$, где $L = ([0,1], \leqslant, +, \times) = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$ и $\widehat{L} = (\widehat{[\widehat{0}, \widehat{1}]}, \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = ([0,1], \geqslant, \min, \max)$ суть шкалы значений Pl и Bel. Меры правдоподобия и доверия заданы исследователем следующими равенствами: $\forall\, E \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{gathered}
\mathrm{Pl}_X(E) \equiv \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \mathop{+}_{x \in E} t^{\widetilde{x}}(x) = \sup_{x \in E} t^{\widetilde{x}}(x), \\
E \neq \varnothing, \qquad \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0, \qquad \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1, \\
\mathrm{Bel}_X(E) \equiv \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \mathop{\widehat{+}}_{x \in X \setminus E} \widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) = \inf_{x \in X \setminus E} \widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x), \\
E \neq X, \qquad \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1, \qquad \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

в которых $E = \bigcup\limits_{x \in E} \{x\} = \bigcap\limits_{x \in X \setminus E} (X \setminus \{x\})$,

$$t^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x), \qquad \widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x), \qquad x \in X. \tag{2}$$

Согласно (2) функции $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to L$ и $\widehat{t}^{\,\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to \widehat{L}$ определены мерами $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и называются распределениями правдоподобий и доверий значений неопределенного элемента $\widetilde{x}$.

С другой стороны, будучи заданным исследователем распределениями (2), неопределенный элемент $\widetilde{x}$ определяет равенствами (1) меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и поэтому называется каноническим для неопределённого пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, а последнее называется его моделью.

3 Неопределенный элемент как неопределенная высказывательная переменная

В рассматриваемом контексте неопределенный элемент $\widetilde{x}$ моделирует субъективные суждения исследователя как его неопределенные высказывания о неизвестных значениях $x \in X$ и их модальности, характеризующие его представления об их истинности.

Такая характеристика $\widetilde{x}$ основана на теоретико-множественном представлении логики высказываний, согласно которому в $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$:

X – множество элементарных высказываний, $\mathcal{P}(X)$ – класс всех высказываний, любое высказывание a взаимно однозначно представлено множеством $A \in \mathcal{P}(X)$ тех элементарных высказываний $x \in X$, каждое из которых влечет a: $a \leftrightarrow A = \bigcup\limits_{x \in X,\, x \to a} \{x\}$.

Каждое элементарное высказывание x представлено в X множеством $\{x\}$, $x \leftrightarrow \{x\}$, и выделено условием, согласно которому любое элементарное высказывание $x \in X$ не следует ни из какого высказывания, кроме x и всегда ложного $\mathbf{0}$.

Интерпретация: $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ $(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A))$ – правдоподобие истинности неопределенного высказывания (субъективного суждения), согласно которому $\widetilde{x} = x$ $(\widetilde{x} \in A)$, где $x \leftrightarrow \{x\}$ $(a \leftrightarrow A)$. Соответственно $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ $(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A))$ есть доверие истинности неопределенного высказывания, согласно которому $\widetilde{x} \in X \setminus \{x\}$ $(\widetilde{x} \in A)$.

4 Принцип относительности

Следующие условия определяют меры правдоподобия Pl, доверия Bel (1) и шкалы L, $\widehat{L}$ их значений:

• исследователь может всегда предложить модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ неопределенного элемента $\widetilde{x}$, выразив в (2), насколько, по его мнению, относительно правдоподобны равенства неопределенного высказывания $\widetilde{x} = x$, $x \in X$, и насколько следует относительно доверять их отрицаниям $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$.

«Относительно» означает, что в $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$

• численные значения мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)$, $E \in \mathcal{P}(X)$, в (1), отличные от 0 и 1, не могут быть содержательно истолкованы. Существенна лишь их упорядоченность; более того,

• меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$ эквивалентны, если $\exists\, \gamma(\cdot), \widehat{\gamma}(\cdot) \in \Gamma\ \forall\, E \in \mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(E)$, $\hat{\gamma}(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(E)$, где Γ – группа непрерывных, строго монотонных функций $\gamma(\cdot)\colon\ [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, с групповой операцией «$\circ$» : $(\gamma \circ \gamma')(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0,1]$.

Согласно этим условиям

① группа Γ определяет группу $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов $\gamma\colon L \to L$, $\widehat{\gamma}\colon \widehat{L} \to \widehat{L}$, $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, шкал $L = ([0,1], \leqslant, +, \times)$, $\widehat{L} = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. Это означает, что

$$\forall\, \gamma(\cdot) \in \Gamma\ \forall\, a, b \in [0,1] \qquad \gamma[0,1] = [0,1], \qquad \gamma(a * b) = \gamma(a) * \gamma(b), \tag{3}$$

где $*$ – символ любой из бинарных операций $+$, $\widehat{+}$, $\times$, $\widehat{\times}$, и выполнены эквивалентности $\Leftrightarrow$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b),\ a \,\widehat{\leqslant}\, b \Leftrightarrow \gamma(a) \,\widehat{\leqslant}\, \gamma(b); \tag{4}$$

в свою очередь равенства, определяющие бинарные операции в шкалах L и $\widehat{L}$

$$\begin{matrix} a + b = \max\{a,b\}, & a \times b = \min\{a,b\}, \\ a \,\widehat{+}\, b = \min\{a,b\}, & a \,\widehat{\times}\, b = \max\{a,b\}, \end{matrix} \qquad a, b \in [0,1], \tag{5}$$

следуют из:

1) условий (3), (4),

2) непрерывности и коммутативности операций $*\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, где $*$ – любая из операций $+$, $\times$, $\widehat{+}$, $\widehat{\times}$,

3) требований $\forall\, a, b \in [0,1]$ $a \leqslant b \Leftrightarrow b \,\widehat{\leqslant}\, a$ и

4) следующих свойств 0 и 1: $\forall\, a \in [0,1]$ $a + 0 = a \,\widehat{\times}\, 0 = a \times 1 = a \,\widehat{+}\, 1 = a$, $a + 1 = a \,\widehat{\times}\, 1 = 1$ и $a \times 0 = a \,\widehat{+}\, 0 = 0$; согласно этим условиям $L = ([0,1], \leqslant, +, \times)$, $\widehat{L} = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\widehat{[\widehat{0}, \widehat{1}]}, \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, где $\widehat{0} = 1$, $\widehat{1} = 0$, $\widehat{\leqslant} \sim \geqslant$ и $\widehat{[\widehat{0}, \widehat{1}]} = [0,1]$.

② Группа Γ определяет и группу $\overline{\overline{\Gamma}}$ изоморфизмов $\gamma\colon L \to \gamma L$, $\widehat{\gamma}\colon \widehat{L} \to \widehat{\gamma}\widehat{L}$, $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\overline{\Gamma}}$.

Это означает, что $\forall\,\gamma(\cdot)\in\Gamma\ \forall\,a\in L,\widehat{L}\Leftrightarrow\gamma(a)\in\gamma L,\gamma\widehat{L}$, а бинарные операции $*$ и отношения $\leqslant,\widehat{\lessgtr}$ в шкалах γL и $\gamma\widehat{L}$ определены равенствами (3) и эквивалентностями (4), а именно: $a*b\in L,\widehat{L}\to\gamma(a*b)=\gamma(a)*\gamma(b)\in\gamma L,\gamma\widehat{L}$, $a\leqslant b\Leftrightarrow\gamma(a)\leqslant\gamma(b)$, $a\widehat{\lessgtr}b\Leftrightarrow\gamma(a)\widehat{\lessgtr}\gamma(b)$, $a,b\in L,\widehat{L}$.

Следствием 2 является принцип относительности, согласно которому все шкалы $\gamma\,L$, $\gamma\in\overline{\overline{\Gamma}}$, и $\widehat{\gamma}\,\widehat{L}$, $\widehat{\gamma}\in\overline{\overline{\Gamma}}$ (являющиеся координатными представлениями шкал L и $\widehat{L}$)

• *изоморфны*, и исследователи могут формулировать модели в «своих» (субъективных) шкалах γL, $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, выбрав $\gamma,\widehat{\gamma}\in\overline{\overline{\Gamma}}$; заметим однако, что для любых мер $\mathrm{Pl}(A)\in(0,1)$ и $\mathrm{Bel}(B)\in(0,1)$ преобразования $\gamma(\cdot)$ и $\widehat{\gamma}(\cdot)$ можно выбрать так, чтобы значения эквивалентных им мер $\gamma(\mathrm{Pl}(A))$ и $\widehat{\gamma}(\mathrm{Bel}(B))$ стали произвольно близкими к 0 или к 1.

• сформулированные в парах шкал L', $\widehat{L}'$ и L'', $\widehat{L}''$, модели считаются эквивалентными, если существует пара шкал $L=\gamma' L'=\gamma'' L''$ и $\widehat{L}=\widehat{\gamma}'\widehat{L}'=\widehat{\gamma}''\widehat{L}''$, $\gamma',\gamma'',\widehat{\gamma}',\widehat{\gamma}''\in\overline{\overline{\Gamma}}$, в которых их формулировки совпадают;

• содержательно истолкованы могут быть только те модели и их следствия, формулировки которых не зависят от выбора (координатных представлений) шкал L, $\widehat{L}$, т. е. одинаковы для всех исследователей.

5 Правдоподобия и доверия истинности свойств исследуемого объекта, обусловленных его субъективной моделью

Любая функция $\varphi(\cdot)\colon X\to Y$ задает неопределенный элемент $\widetilde{y}=\varphi(\widetilde{x})$ со значениями в Y и неопределённое пространство $\big(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}\big)$, в котором $\forall\,A\in\mathcal{P}(Y)$ $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y}\in A)=$ $=\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x})\in A)=\sup\limits_{y\in A}t^{\widetilde{y}}(y)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y}\in A)=\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x})\in A)=\inf\limits_{y\in Y\setminus A}\widehat{t}^{\widetilde{y}}(y)$, где для любого $y\in Y$

$$
\begin{aligned}
t^{\widetilde{y}}(y)&\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y}=y)=\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x})=y)=\sup_{\substack{x\in X\\ \varphi(x)=y}}t^{\widetilde{x}}(x),\\
\widehat{t}^{\widetilde{y}}(y)&\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y}\neq y)=\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x})\neq y)=\inf_{\substack{x\in X,\\ \varphi(x)=y}}\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

суть правдоподобие и доверие истинности неопределенных высказываний, согласно которым $\varphi(\widetilde{x})=y$ и $\varphi(\widetilde{x})\neq y$.

Если $A^{\boldsymbol{\cdot}}\colon X\to\mathcal{P}(Y)$ и $A_{\boldsymbol{\cdot}}\colon Y\to\mathcal{P}(X)$ – взаимно обратные (многозначные) отображения: $\forall\,x\in X$ $A^x=\{y\in Y,\ x\in A_y\}$, $\forall\,y\in Y$ $A_y=\{x\in X,\ y\in A^x\}$, то образ $A^{\widetilde{x}}$ неопределенного элемента $\widetilde{x}$ есть множество, заданное на $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ со значениями в $\mathcal{P}(Y)$.

Индикаторные функции одноточечного покрытия $A^{\widetilde{x}}$ суть

$$
\begin{aligned}
t^{A^{\widetilde{x}}}(y)&\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y\in A^{\widetilde{x}})\equiv\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in A_y \qquad y\in Y,\\
\widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y)&\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(y\in A^{\widetilde{x}})\equiv\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in A_y),\qquad y\in Y;
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$t^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ и $\widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ суть правдоподобие и доверие истинности неопределенного высказывания, согласно которому $\widetilde{x}\in A_y$ или, что эквивалентно, $y\in A^{\widetilde{x}}$, $y\in Y$.

Исходя из своей модели $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ неопределенного элемента $\widetilde{x}$, исследователь может вычислять правдоподобия и доверия истинности любых своих субъективных суждений о значениях любых характеристик исследуемого объекта как функций неопределенного элемента $\widetilde{x}$.

Если $M(\widetilde{x})$ – субъективная модель исследуемого объекта, предложенная исследователем вместо семейства $M(x)$, $x \in X$, то для любой неопределенной характеристики $\varphi(\widetilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(M(\widetilde{x}))$ или $A^{\widetilde{x}} = \mathrm{F}(M(\widetilde{x}))$ исследуемого объекта, обусловленной его моделью $M(\widetilde{x})$, правдоподобие и доверие истинности неопределенного высказывания, согласно которому $\varphi(\widetilde{x}) = y$, $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$ или $y \in A^{\widetilde{x}}$, $y \in Y$, определены в (6), (7)

Пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ определяет математическую основу компьютерного интерфейса, обеспечивающего «интеллектуальный диалог» исследователя с моделью исследуемого объекта, позволяющего исследователю вычислить значения мер правдоподобия и доверия истинности любых свойств изучаемого объекта, обусловленных его субъективной моделью $M(\widetilde{x})$.

6 Субъективные модели «абсолютного незнания» и «точного знания»

Исследователь всегда может предложить модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ неопределенного элемента $\widetilde{x}$. Действительно, когда исследователь «ничего не знает» об изучаемом объекте и о его модели или «доподлинно знает всё», он может воспользоваться следующими инвариантными относительно шкал γL и $\widehat{\gamma}\widehat{L}$, $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, моделями.

• В случае «абсолютного незнания» модели исследуемого объекта меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ задаются распределениями $t^{\widetilde{x}}(x) = 1$, $x \in X$, все значения но. э. $\widetilde{x}$ равноправдоподобны, $\sup\limits_{x \in X} t^{\widetilde{x}}(x) = 1$, и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = 0$, $x \in X$, любому неравенству $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$, доверять нельзя, $\inf\limits_{x \in X} \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = 0$. В этом случае для любого следствия модели $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$, в (6) для $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$: $t^{\widetilde{y}}(y) = 1$, $\widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) = 0$, $y \in Y$, т. е. «абсолютное незнание» модели влечёт «абсолютное незнание» любого ее следствия.

• В случае «точного знания» модель исследуемого объекта задается распределениями $t^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0, \end{cases}$ $x \in X$, где x_0 – единственное правдоподобное значение $\widetilde{x}$, $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x) = \begin{cases} 1, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0, \end{cases}$ $x \in X$, x_0 – единственное значение, при котором неравенству $\widetilde{x} \neq x_0$ доверять нельзя; при этом в (6) для любого следствия модели $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$ $t^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & y = y_0, \\ 0, & y \neq y_0, \end{cases}$ $y \in Y$, $\widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) = \begin{cases} 1, & y \neq y_0, \\ 0, & y = y_0, \end{cases}$ $y \in Y$, где $y_0 = \varphi(x_0)$, т. е. «точное знание» модели влечёт «точное знание» любого её следствия.

Следовательно, любой исследователь всегда может предложить пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, определяющее субъективную модель любого изучаемого объекта. Заметим, что вероятностная модель «абсолютного незнания», как вероятностное пространство, не существует.

7 Восстановление модели измерения температуры воды в водоеме с помощью сглаживающих сплайнов

В настоящей работе методы субъективного моделирования применялись для выбора параметра модели измерения временной зависимости температуры воды в открытом водоеме. Запишем схему измерения температуры в виде

$$y_i = f(t_i) + \nu_i, \qquad i = 0, \ldots, n, \tag{8}$$

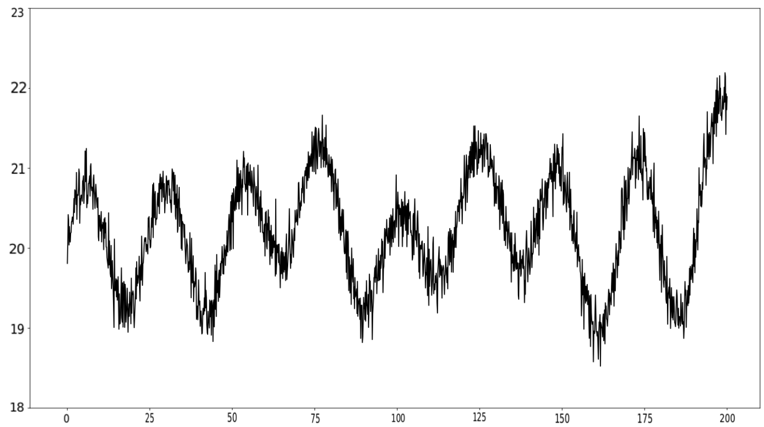

Рис. 1 Данные измерений температуры $f(t_i)$ в разные моменты времени $i = 0, \ldots, 200$.

где y_i – искажённое шумом ν_i значение температуры воды $f(t_i)$ в момент времени t_i, $i = 0, \ldots, n$.

Исследователь полагает, что в (8) $f(\cdot) : [t_0, t_n] \to R^1$ – гладкая функция, квадрат которой и её производных интегрируемы, ν_i, $i = 0, \ldots, n$, – ошибки измерений (шум). Эти априорные предположения представляются естественными для изменения температуры во времени: в силу физических свойств воды в обычных природных условиях, зависимость $f(\cdot)$ её температуры от времени $t \in [t_0, t_n]$ должна быть достаточно гладкой в силу большой теплоёмкости воды и малой ее теплопроводности, а возможные флуктуации температуры связаны с ветром, перемешиванием воды и другими факторами. Наряду с флуктуациями температуры в (8) присутствует погрешность измерения ν, обусловленная неидеальностью датчика температуры. Для решения задачи интерпретации данных измерения (8) нужно выделить первое слагаемое, равное значениям температуры в моменты времени t_i, $i = 0, \ldots, n$. Однако сформулированная (субъективная) модель остаётся неопределённой, поскольку априори неизвестны математические свойства шума, а класс возможных зависимостей $f(\cdot)$ слишком широк.

Для решения задачи интерпретации измерений необходимо по данным (8) восстановить математическую модель временной зависимости температуры f и шума ν, позволяющую оптимально оценить слагаемые в (8). Для этого воспользуемся математическими свойствами сглаживающих сплайнов, математическим формализмом субъективного моделирования и субъективными представлениями исследователя о физических свойствах диамики температуры воды и шума.

Будем считать, что $f(\cdot)$ является сплайном порядка q, заданным на отрезке $[a, b]$, т.е функцией, определяемая следующими требованиями.

1. Для фиксированных $t_0, \ldots, t_n$, $a < t_0 < t_1 < \ldots < t_n < b$, $f(t)$ – полином степени $2q-1$ на (t_i, t_{i+1}), $i = 0, \ldots, n-1$, $n > q$;
2. $f(t)$ – полином степени $q - 1$ на $[a, t_0) \cup (t_n, b]$;
3. производная порядка $(2q-2)$ $f^{(2q-2)}(\cdot) \in C_{[a,b]}$, где $C_{[a,b]}$ – класс непрерывных на $[a, b]$ функций;
4. в узлах $t_0, \ldots, t_n$ полиномы сшиты по непрерывности вплоть до производной порядка $2(q-1)$: $0 = f^{(2q-2)}(t_j + 0) - f^{(2q-2)}(t_j - 0)$.

Таким образом, сглаживающий сплайн есть непрерывная кусочно-полиномиальная функция на $[a, b]$ с интегрируемыми квадратами производных вплоть до $(q-1)$-й произ-

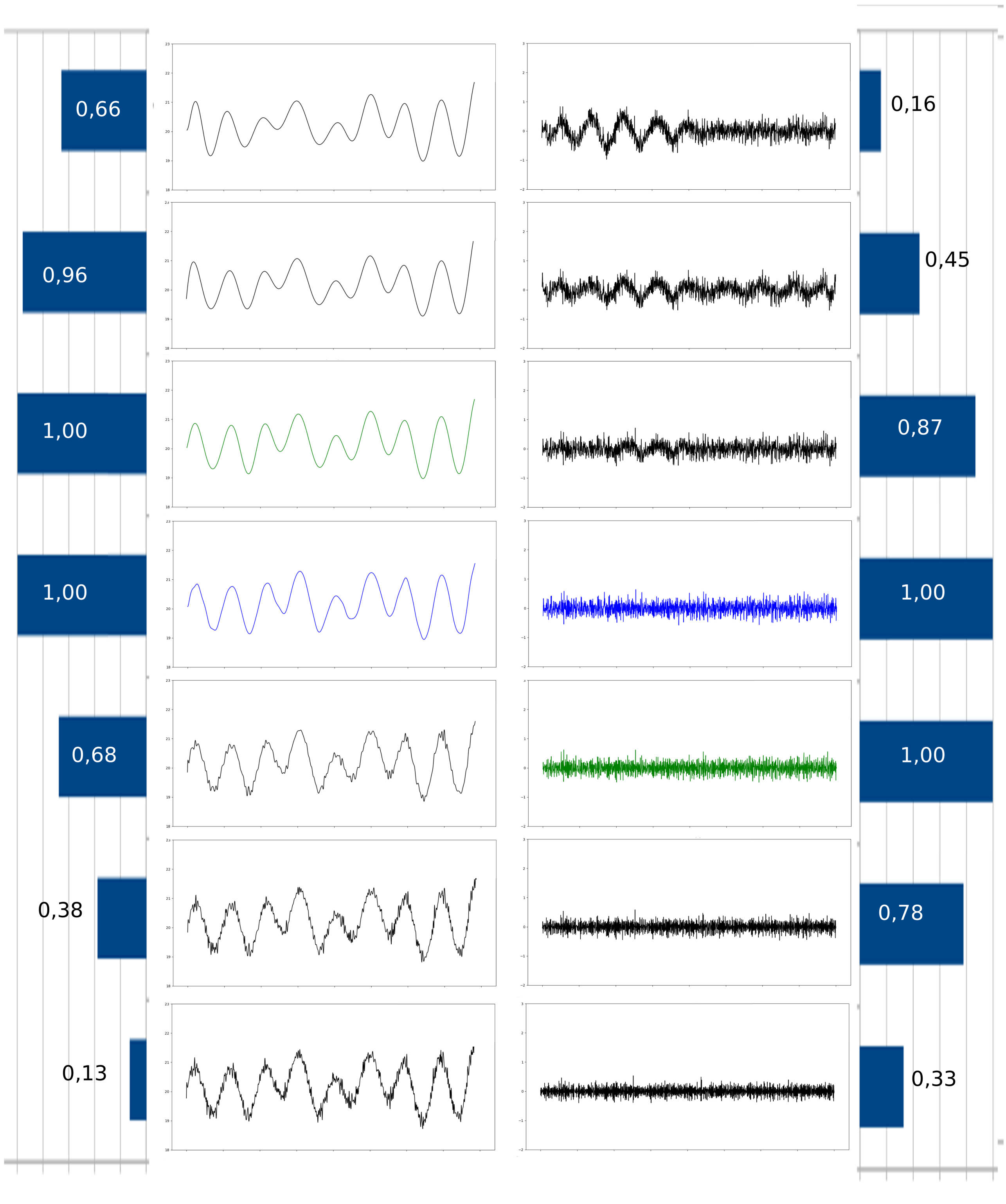

Рис. 2 Распределение правдоподобий значений сглаживающего параметра сплайна для двух разных факторов.

водной. Можно показать, что сглаживающие сплайны порядка q образуют $(n+1)$-мерное подпространство гильбертова пространства функций, заданных на $[a, b]$, для которых все квадраты производных до q включительно интегрируемы.

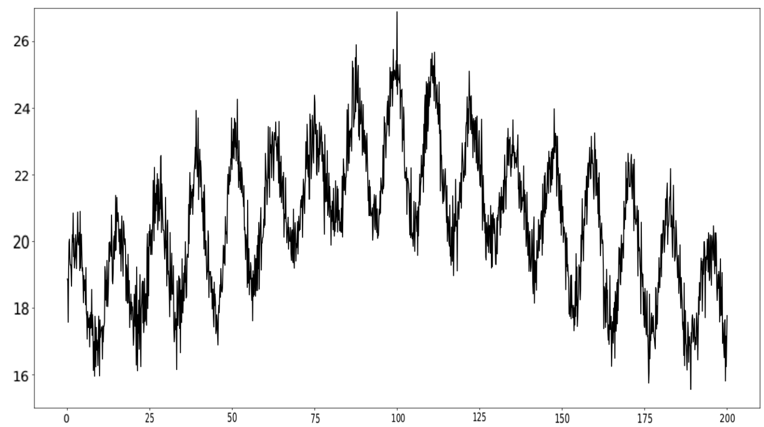

Рис. 3 Данные измерений температуры $f(t_i)$ в разные моменты времени $i = 0, \ldots, 200$.

В качестве модели временной зависимости температуры выберем сглаживающий сплайн как решение следующей задачи на минимум:

$$\min \left\{ \int\limits_a^b \left(f^{(q)}(t)\right)^2 dt + \rho \sum_{j=0}^{n} \left(f(t_j) - y_j\right)^2 | f \in \widetilde{H}^q \right\}. \tag{9}$$

Здесь $\widetilde{H}^q$ – гильбертово пространство функций, заданных на отрезке $[a, b]$, все квадраты производных которых до q включительно интегрируемы, со *скалярным произведением* $(f, g)_\sim = \int\limits_a^b f^{(q)}(t) g^{(q)}(t) dt + \rho \sum\limits_{i=0}^{n} f(t_i) g(t_i)$. Гладкость предполагаемой зависимости температуры $f(\cdot)$ от времени f определяется максимальным порядком непрерывной производной, а также значением параметра ρ.

Согласно свойствам сплайнов, если $f_\rho(\cdot)$ – решение задачи (9), то $f(\cdot)$ есть элемент $(n+1)$-мерного подпространства $S^q_\rho \subset \widetilde{H}^q$, а *разность сглаживаемой функции и решения* $f(\cdot)$ *принадлежит ортогональному в* $\widetilde{H}^q$ *дополнению пространства* S^q_ρ. Из этого, в частности, следует, что при построении сглаживающего сплайна по точкам $\mu_{i,\rho} = y_i - f_\rho(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$ как решения задачи (9) получим сплайн, *равный нулю на* $[a, b]$.

Для построения субъективной модели измерения фиксируется порядок сплайна q и строится эмпирическое распределение правдоподобия неопределенного параметра ρ. Для этого для каждого значения параметра ρ решается задача (9), строятся графики сплайна $f_\rho(t)$ и «остатков» $\mu_{i,\rho}$, $i = 0, \ldots, n$. Далее исследователь на основе своего опыта и понимания описываемого моделью физического процесса указывает в своей шкале относительное правдоподобие того, что при фиксированном ρ полученное решение $f_\rho(\cdot)$ действительно представляет собой гладкую зависимость температуры от времени, а «остатки» $\mu_{i,\rho}$, $i = 0, \ldots, n$ – шум, не содержащий элементов полезного сигнала. В силу свойств $f_\rho(t)$ и «остатков» полученные распределения правдоподобия параметра ρ считаются независимыми, и решение о наиболее правдоподобном значении ρ принимается на основе этих двух распределений.

На рис. 1 в условных единицах приведены данные измерения температуры воды для моментов времени y_i, $i = 0, \ldots, 200$, искаженные шумом. На рис. 2 в левом столбце приведены значения правдоподобия равенства $\rho = z$ для семи значений $z_1, \ldots, z_7$ параметра

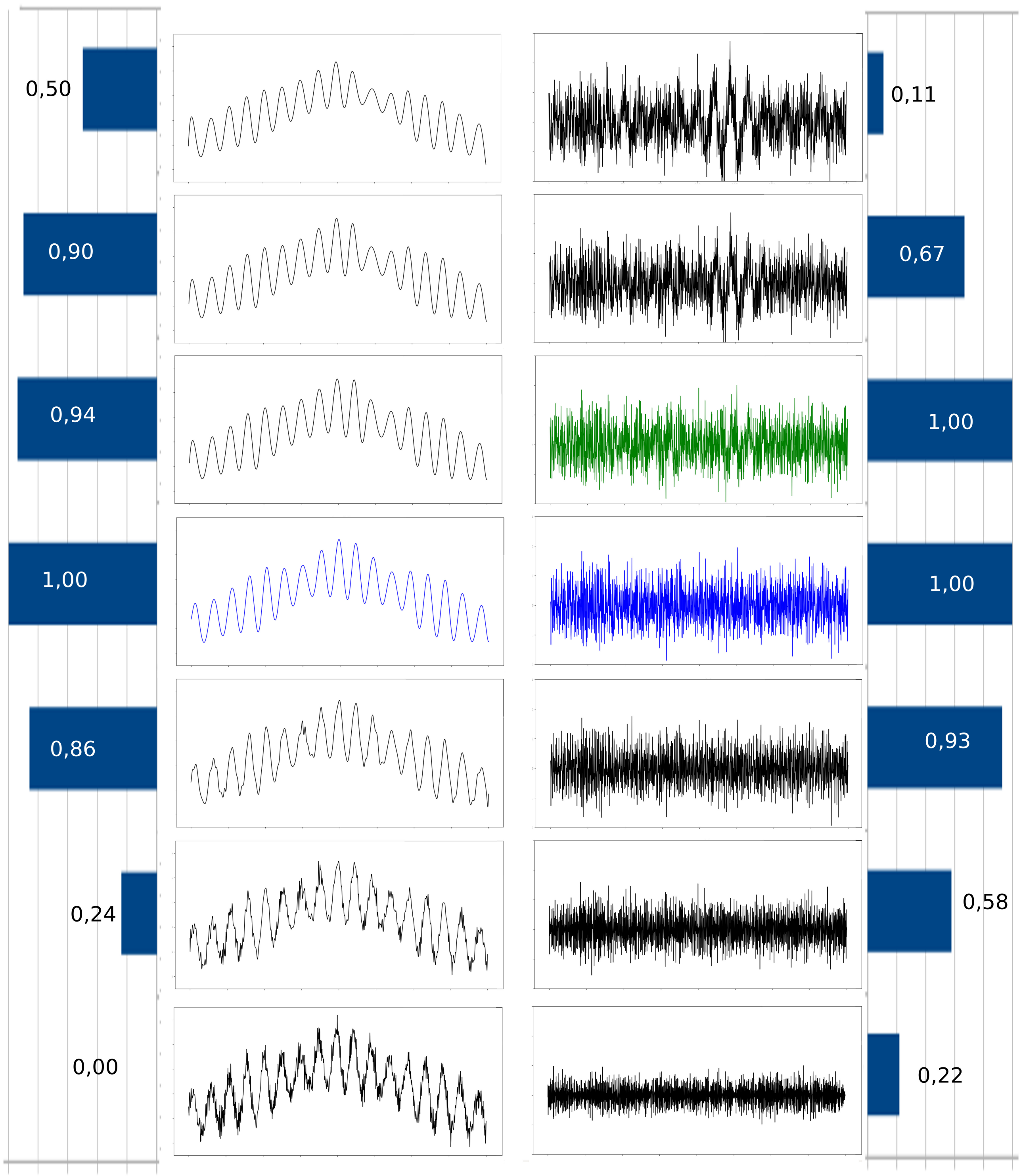

Рис. 4 Распределение правдоподобий значений сглаживающего параметра сплайна для двух разных факторов.

сглаживания. Справа показан график сплайна $f_{\rho_{z_k}}(t_i)$ как решения задачи (9), а на диаграмме слева – значения правдоподобия, присвоенные исследователем значению $\rho = z_k$, $k = 1, \ldots, 7$. По мнению м-и сплайн в третьей строке наиболее правдоподобно восстанавливает искомую зависимость. В правом столбце рис. 2 приведена оценка распределения значений параметра ρ, которую исследователь дал на основании анализа шумовых «остатков» $\mu_{i,\rho}$; слева показан график «остатков» для тех же значений $\rho = z_k$, $k = 1, \ldots, 7$, слева – значение правдоподобия этих остатков как реализации шума. В пятой строке справа расположен график остатков, наиболее правдоподобно восстанавливающий шум. На четвертой строке расположены (слева направо) графики сплайна и «остатков», наиболее оптимально с точки зрения исследователя восстанавливающие зависимость температуры от времени и шум соответственно. Видно, что наиболее правдоподобный с точки зрения исследователя сплайн достигается при значении параметра $\rho = z_5$, а наиболее правдоподобный «остаток» – при значении $\rho = z_3$. Значение $\rho = z_4$ является компромиссным, основанным на правиле объединения независимых распределений правдоподобий.

Поскольку в рассматриваем случае априори известен измеряемый сигнал в равенствах (8), то можно эмпирически оценить реальную погрешность восстановления модели измерения. Как оказалось, предлагаемый метод субъективного моделирования минимизирует эту погрешность, а именно, – выбранный исследователем сглаживающий сплайн соответствует минимуму нормы отклонения сплайна от истинной модельной функции в (8).

Таким же образом восстановлена субъективная сплайновая модель для других данных измерений (см. рис. 3, 4). График остатков, наиболее правдоподобно восстанавливающий шум, расположен справа на третьей строке. Компромиссным является значение $\rho = z_3$.

Подобные результаты получены и при восстановлении моделей, основанных на данных измерений с пропусками значений.

8 Заключение

В работе изложен математический формализм субъективного моделирования и приведен пример его применения для восстановления субъективной математической модели измерений температуры воды в открытом водоеме. Результат измерения температуры воды представлен в виде суммы сглаживающего сплайна, зависящего от неопределенного параметра сглаживания, и шумового остатка, лежащих в ортогональных подпространствах гильбертова пространства сигналов. Исследователь анализирует эти слагаемые исходя из своих представлений об измеряемом сигнале и шуме, основанных на его научном опыте и интуиции, и анализирует два распределения правдоподобий значений параметров сглаживания, одно – на основе представлений о временной зависимости температуры воды, другое – на основе представлений о шумовой погрешности. Любое значение параметра сглаживания, расположенное между найденными значениями, можно считать искомым, но можно продолжить вычисления параметров сглаживания между найденными значениями и уточнить искомое значение. Предложенный подход позволяет выделить наиболее правдоподобную субъективную модель измерения, на основе которой получена оптимальная оценка временной зависимости температуры и шумового остатка.

Литература

[1] *Пытьев Ю. П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 428 с. Изд. 3-е, переработанное и дополненное.

[2] *Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. 230 с.

[3] *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. – СПб.: Наука, 2006. 608 с.

[4] *Josang A., Hankin R.* Interpretation and Fusion of Hiper Opinions in Subjective Logic // 15th International Conference of Information Fusion (FUSION 2012) . — Singapore, 2012.

[5] *Миронов А. М.* Нечеткие модальные логики // Интеллектуальные системы, 2007. №11. С. 201–230.

[6] *Тэрано Т., Асаи К., Сугено М. (ред)* Прикладные нечеткие системы. / Пер. с японского. – М.: Мир, 1993.

[7] *Bouchon-Meunier B., Yager R.* Uncertainty in knowledge-based systems. – Berlin; New York: Springer-Verlag, 1988.

[8] *Bhavsar V. C., Mironov A. M.* Fuzzy modal logics // // Proceedings ofWorkshop on Multi-Valued Logic Programming and Applications. — Seattle, WA, 2006. P. 73–88.

[9] *Cowell R. G., Dawid A. P., Lauritzen S. L. and Spiegelhalter D. J.* Probabilistic Networks and Expert Systems. – New-York: Springer-Verlag, 1999.

[10] *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence. – Princeton University Press, 1976.

[11] *Josang A.* Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic // 11th Workshop on Preferences and Soft Constraints . — Perugia, 2011.

[12] *Josang A.* Logic for Uncertain Probabilities // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2001. Vol. 9. No 3. P. 279–311.

[13] *Klir G. J.* Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory. – NJ: John Wiley, Hoboken, 2006 .

[14] *Helpern J. Y.* Reasoning about uncertainty. – Cambridge, Massachusetts: MIT press, 2003.

[15] *Пытьев Ю. П.* 2013 Моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования. Математическое моделирование 25(4): 102–125.

[16] *Пытьев Ю.П.* Вероятность, возможность и субъективное моделирование в научных исследованиях. Математические и эмпирические основы, приложения. —М: ФИЗМАТЛИТ, 2018. 268 с.

[17] *Пытьев Ю.П.* Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях. 1. Математические и эмпирические основы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон., 2018. №1. С. 3–17. doi: `http://dx.doi.org/10.3103/S0027134918010125`.

[18] *Пытьев Ю.П.* Математические методы субъективного моделирования в научных исследованиях. 2. Приложения Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон., 2018. №2. С. 3–17.

[19] *Пытьев Ю.П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, приложения. —М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. 600 с.

Поступила в редакцию 26.10.2018

Mathematical formalism for subjective modeling*

Yu. P. Pyt'ev, O. V. Falomkina, S. A. Shishkin and A. I. Chulichkov
yuri.pytyev@gmail.com; olesya.falomkina@gmail.com; darkshish@gmail.com; achulichkov@gmail.com
Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991

*The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants 17-07-00832 and 18-07-00424).

The mathematical formalism for subjective modeling (MFSM) of uncertainty, which reflects the unreliability of the subjective information and its matter fuzziness, is created. The MFSM allows the researcher-modeler (r-m) to construct models using the unformalized, incomplete and inconsistent data ranging from the "absolute ignorance" up to the "complete knowledge" of the model of the research object (RO). Since the "complete knowledge" of the model is equivalent to the condition of the applicability of the "standart" modeling, the proposed MFSM significantly generalizes the "standart" mathematical modeling. If data related to the RO is available, the MFSM allows the r-m to use them to test the adequacy of the subjective model to the research objective, to correct the subjective model, and under certain conditions – to empirically reconstruct the RO model.

The MFSM is based on the proposed by the r-m space with plausibility and belief measures. They characterize the subjective judgments modalities made by the r-m about the validity of an unknown parameter which determines the RO model (the RO model by itself may be this unknown parameter). The application of the proposed formalism is illustrated by restoring a mathematical model of the water temperature measurements, obtained at the given moments. To solve the problem, the r-m scientific experience, his intuition and subjective ideas concerning a mathematical model of the water temperature measurements are used. At the same time the mathematical models of a temperature sensor and measurement errors are unknown. It is suggested that distorted by a noise time series of temperature values is a measurement result, while a noise mathematical model is unknown and has to be restored based on the r-m scientific experience and intuition, as well as a time dependence mathematical model. The desired subjective measurement mathematical model has to be identified within a parametric family of smoothing splines and their orthogonal complements. In our work a measurement mathematical model is reconstructed and optimal estimates of a smooth time dependence and an orthogonal noise remainder are obtained.

The MFSM is essentially different from other approaches considered at [3, 8–12] and allows:

1) to create a universal subjective model of the RO characteristics "absolute ignorance", which doesn't depend on a measurement model as well as a sample space cardinality in contrast to "absolute ignorance" models in books [3, 9];

2) to develop methods of empirical construction and verification of a subjective judgments model proposed by the r-m in contrast to the modal logic formalism [8];

3) to formulate a subjective judgments model based on a simple propositions plausibility and belief values order in contrast to models based on plausibility and belief numerical values [3, 8–12].

Keywords: *measure of plausibility; measure of belief; restoring the model; smoothing spline; uncertainty*

DOI: 10.21469/22233792.4.2.04

References

[1] Pyt'ev Yu. P. 2012. *Metody matematicheskogo modelirovaniya izmeritel'no-vychislitel'nykh sistem* [Methods of mathematical modeling of computer-aided measuring systems]. M.: FIZMATLIT. 428 p. (In Russian)

[2] Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. 1990. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems]. M.: Nauka. 230 p. (In Russian)

[3] Tulup'yev A. L., Nikolenko S. I., Sirotkin A. V. 2006. *Bayyesovskiye seti: logiko-veroyatnostnyy podkhod* [Bayesian Networks: Logical-Probabilistic Approach]. SPb.: Nauka. 608 p. (In Russian)

[4] Josang A., Hankin R. 2012. Interpretation and Fusion of Hiper Opinions in Subjective Logic. // *15th International Conference of Information Fusion (FUSION 2012)* . Singapore.

[5] Mironov A. M. 2007. Nechetkiye modal'nyye logiki [Fuzzy Modal Logic]. // *Intellektual'nyye sistemy* [Intellectual systems]. 11. P. 201–230. (In Russian)

[6] Terano T. (Editor), Asai K (Editor), Sugeno M. (Editor) 1994. *Applied Fuzzy Systems.* Academic Press. 314 p.

[7] Bouchon-Meunier B., Yager R. 1987. *Uncertainty in knowledge-based systems.* Berlin; New York: Springer-Verlag.

[8] Bhavsar V. C., Mironov A. M. 2006. Fuzzy modal logics. // *Proceedings ofWorkshop on Multi-Valued Logic Programming and Applications.* Seattle, WA. 73–88.

[9] Cowell R. G., Dawid A. P., Lauritzen S. L. and Spiegelhalter D. J. 1999. *Probabilistic Networks and Expert Systems.* New-York: Springer-Verlag.

[10] Shafer G. 1976. *A Mathematical Theory of Evidence.* Princeton University Press.

[11] Josang A. 2011. Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic. *11th Workshop on Preferences and Soft Constraints.* Perugia.

[12] Josang A. 2001. Logic for Uncertain Probabilities. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 9(3):279–311.

[13] Klir G. J. 2006. *Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory.* NJ: John Wiley, Hoboken.

[14] Helpern J. Y. 2003. *Reasoning about uncertainty.* Cambridge, Massachusetts: MIT press.

[15] Pyt'ev Yu. 2013. Modeling of Subjective Judgments Made by a Researcher/Modeler about the Model of the Research Object. *Mathematical Modeling and Computer Simulations* 5(6):538–557 doi: `http://dx.doi.org/10.1134/S2070048213060094`

[16] Pyt'ev Yu. P. 2018. *Veroyatnost', vozmozhnost' i sub'yektivnoye modelirovaniye v nauchnykh issledovaniyakh. Matematicheskiye i empiricheskiye osnovy, prilozheniya* [Probability, possibility and subjective modeling in scientific research. Mathematical and empirical foundations, applications]. M: FIZMATLIT, 268 p. (In Russian)

[17] Pyt'ev Yu. P. 2018. Mathematical Methods of Subjective Modeling in Scientific Research: I. The Mathematical and Empirical Basis. *Moscow University Physics Bulletin* . 73(1):3–17. doi: `http://dx.doi.org/10.3103/S0027134918010125`.

[18] Pyt'ev Yu. P. 2018. Mathematical Methods of Subjective Modeling in Scientific Research. 2: Applications. *Moscow University Physics Bulletin* . 73(2):125–140. doi: `http://dx.doi.org/10.3103/S0027134918020145`

[19] Pyt'ev Yu. P. 2016. *Vozmozhnost' kak al'ternativa veroyatnosti. Matematicheskiye i empiricheskiye osnovy, prilozheniya* [Possibility as an alternative to probability. Mathematical and empirical bases, applications]. M: FIZMATLIT, 600 p. (In Russian)

Received October 26, 2018