

Исследования соотношений между нестационарными временными рядами на примере производственных функций

И. Л. Кириллюк, О. В. Сенько

igokir@rambler.ru; senkoov@mail.ru

¹Институт экономики РАН, Россия, г. Москва, ул. Нахимовский проспект, 32; ²ФИЦ Информатика и управление РАН, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 44/2

Ложная регрессия имеет место, если стандартные средства обнаружения закономерностей в моделях, такие, как величина коэффициента детерминации, указывают на наличие связи между переменными, в то время, как на самом деле она отсутствует. В работе исследовано явление ложной регрессии на модели производственных функций Кобба-Дугласа по временным рядам, описывающих динамику макрорезультатов для регионов Российской Федерации за период 1996-2014 гг. Наряду с классическими методами построения и оценивания линейных регрессионных моделей, такими как F-тест или тест Стьюдента, использовались также методы оценивания стационарности и коинтеграции переменных, входящих в многомерные временные ряды. Дополнительными средствами анализа являлись методы Монте-Карло моделирования, которые использовались для имитации стационарных временных рядов как последовательностей реализации независимых нормально распределенных случайных переменных, а также нестационарных временных рядов, задаваемых с помощью процесса авторегрессии с единичным корнем, то есть с помощью независимых одинаково распределенных приращений каждого из последующих элементов ряда по отношению к предыдущим. Статистическая достоверность регрессионных моделей, полученных на реальных данных, оценивалась через сравнение их качества с качеством моделей на многомерных стационарных или нестационарных временных рядах, сгенерированных исходя из условий независимости их составляющих. Показано, что достоверность зависимости, выражаемой функцией Кобба-Дугласа, верифицируется не только при использовании имитации процессами гауссовского белого шума, но и при имитации нестационарными процессами авторегрессии с единичным корнем. Однако применение описанной методологии наряду с исходными данными к данным с вычтенными трендами зависимости от времени, не позволило достоверно выявить какую-либо дополнительную связь, отличную от эффекта, связанного с наличием общих детерминированных линейных трендов для всех переменных модели.

Ключевые слова: *ложная регрессия; методы Монте-Карло; коинтеграция; производственные функции*

DOI: 10.21469/22233792.4.3.01

1 Введение

Одной из основных проблем, возникающих при анализе временных рядов, а также панельных данных, является проблема ложных регрессий. Под ложными регрессиями понимаются регрессионные модели, описывающие зависимость переменной Y от переменных X_1, \dots, X_n , которые одновременно удовлетворяют трём условиям:

- Внешне связь между переменными имеет вид, подобный реально существующей зависимости.
- При использовании стандартных средств верификации, предполагающих независимость наблюдений, регрессии оказываются формально статистически значимыми.

- На самом деле этот результат является чисто случайной конфигурацией данных, реальной зависимости переменной Y от переменных X_1, \dots, X_n нет.

Возникновение ложных регрессий может быть связано со многими причинами. Например, причиной формальной достоверности может быть случайное опровержение нулевой гипотезы о независимости Y от X_1, \dots, X_n при переборе большого числа комбинаций переменных. То есть, в основе ложной регрессии может лежать множественное тестирование. Другой важной причиной возникновения ложных регрессий является стохастическая нестационарность по крайней мере части из временных рядов

$$\begin{aligned} & Y_1, \dots, Y_T, \\ & x_{11}, \dots, x_{T1}, \\ & \dots \dots \dots \\ & x_{1n}, \dots, x_{Tn}. \end{aligned}$$

Под стохастической нестационарностью в данном случае понимается нестационарность, неустранимая простым вычитанием детерминированных трендов или сезонных колебаний. Например, ложные регрессии могут возникать при порождении рядов процессами случайного блуждания вида

$$X_t = X_{t-1} + e_t, \quad (1)$$

где e_t – гауссовский белый шум.

Широкий интерес исследователей к проблеме ложных регрессий (ЛР) был привлечён в работе [1]. В работе [2] был предложен получивший далее значительное распространение подход к выявлению ЛР, основанный на использовании тестов на коинтеграцию. Иными словами, для принятия регрессионной модели наряду с требованием высоких величин R^2 выдвигается дополнительное требование о стационарности временного ряда, образуемого регрессионными остатками. Недостатком такого подхода при применении его к относительно коротким временным рядам длиной, например, несколько десятков измерений, которые на практике оказываются весьма распространёнными, является высокая вероятность принятия гипотез о наличии нестационарности в силу малой длины ряда регрессионных остатков.

2 Описание модели, данных и методов исследования

Интересным объектом для исследования эффекта ложной регрессии являются широко используемые в экономике модели производственных функций. Велико разнообразие этих моделей, отличающихся по используемым данным и по виду функциональных зависимостей, а также по применяемым для их оценки эконометрическим методам. Применимость некоторых моделей в конкретных ситуациях иногда является предметом споров и критики, поскольку не везде учитывается весь набор предпосылок, обуславливающих корректность применения моделей, не везде в полной мере учитываются явления мультиколлинеарности, автокоррелированности остатков регрессии, нестационарности и другие особенности применяемых данных.

Нам известно несколько статей, где моделируются производственные функции регионов России [3–11] с применением различающихся между собой моделей и подходов. Мы в данной статье сделаем свои расчёты производственных функций на этом же примере, в первую очередь сфокусировавшись на изучении явления ложной регрессии и используя метод Монте Карло.

В качестве обрабатываемых эмпирических данных нами использовались характеристики 78 регионов Российской Федерации, для которых были доступны временные ряды данных длины 18 лет [12] (за 1996-2014 гг.). То есть, не проводились расчёты для Крыма, Севастополя, Чеченской республики, Чукотки, где доступные ряды используемых нами показателей короче.

В качестве показателей, используемых в модели производственной функции - труда (L), капитала (K), производимого продукта (Y) использовались данные Росстата, соответственно: число занятых в экономике, основные фонды, валовой региональный продукт. Приведение к постоянным ценам (необходимое для учёта инфляции) осуществлялась с помощью индекса физического объема валового регионального продукта (выраженного в процентах к предыдущему году).

Расчёт производственных функций производился по модели Кобба-Дугласа [13]:

$$Y = AK^\alpha L^\beta. \quad (2)$$

Вычислялись статистические характеристики A , α , β зависимости ряда, соответствующего $\ln(Y)$ от рядов, соответствующих $\ln(L)$ и $\ln(K)$ по модели линейной регрессии $\ln(Y) = A + \alpha \ln(K) + \beta \ln(L)$. Используемое в ряде статей ограничение $\alpha + \beta = 1$ не накладывалось.

3 Расчёты по модели Кобба-Дугласа

Были проведены оценки зависимости логарифмов используемых величин от времени по классической модели линейной регрессии с использованием метода наименьших квадратов. Модель считается адекватно описывающей данные, когда значения коэффициента детерминации R^2 близки к единице, или когда $p < 0.05$ (где p – широко используемый показатель достоверности модели). Для $\ln(K)$ и $\ln(Y)$ достоверны оказались и все коэффициенты по t -критерию. Для $\ln(L)$ коэффициенты оказались не достоверны по t -критерию у 33 регионов.

Однако, с точки зрения современных эконометрических стандартов этого анализа не достаточно для оценки регрессии. В случае нестационарности переменных вероятность возникновения ложных регрессий оказывается весьма существенной. Поэтому был применён расширенный тест Дики-Фуллера (ADF) на стационарность [14] для $\ln(L)$, $\ln(K)$, $\ln(Y)$ всех регионов Российской Федерации. Для проверки стационарности или коинтегрированности временных рядов в нём используются свои p -значения. Согласно данным теста, для $\ln(L)$ имеет место соотношение $p < 0.05$ для 10 регионов, для $\ln(K)$ – для 15 значений и для $\ln(Y)$ – для 43 значений. Таким образом, согласно тесту, стационарность динамики показателей в целом не подтверждается.

Для всех 78 анализируемых регионов значимость регрессионных моделей (2) по F -тесту оценивалась на уровне $p < 0.05$. Соответствующие значения R^2 приведены в таблице 1 в приложении. Оценка значимости коэффициентов по t -тесту показала, что значимы все коэффициенты при $\ln(L)$ и только для двух регионов оказались не значимы коэффициенты при $\ln(K)$.

В связи с нестационарностью данных, наличие коинтеграции для моделей Кобба-Дугласа в каждом из регионов изучалось посредством оценивания стационарности остатков модели с использованием расширенного теста Дики-Фуллера (методика Энгла-Грэнджера) [2]. Как видно из таблицы 1 приложения, в основном стандартные средства оценки (в таблице приведены значения R^2) указывают на статистическую достоверность модели, чего нельзя сказать о тесте на коинтеграцию, результат которого (p -значение)

обозначен в таблице как показатель p_{adf} . В подавляющем большинстве случаев тест Дики-Фуллера не позволяет принять гипотезу о наличии коинтеграции, что делает результаты моделирования не достоверными. Рассчитанные параметры регрессии A, α, β демонстрируют существенный разброс значений, что также видимо во многом связано не только с различием в реальных особенностях экономик регионов, с короткой длиной рядов данных, но и с ложной регрессией, обусловленной нестационарностью и прочими особенностями данных, из за которых они не удовлетворяют условиям Гаусса-Маркова, выполнение которых обеспечило бы эффективность обычной модели линейной регрессии с гауссовскими независимыми остатками.

Поскольку полученный результат об отсутствии коинтеграции возможно связан с недостаточным количеством данных, а все значения R^2 в расчётах по модели (2) велики, и предположение о наличии связи (2) проистекает из соображений здравого смысла и из общих экономических законов, проведено альтернативное исследование достоверности модели функции Кобба-Дугласа, основанное на методе Монте-Карло. Для имитации рядов значений $Ln(L), Ln(K), Ln(Y)$ независимо получалось по 5000 вариантов псевдовыборок. В качестве аналога исходных рядов, или их приращений, применялся гауссовский белый шум, полученный при помощи датчика случайных чисел. То есть, ряды имитировались по формулам

$$X_t = e_t, \quad (3)$$

при имитации стационарных процессов и

$$X_t = X_{t-1} + e_t \quad (4)$$

при имитации процесса случайного блуждания (винеровского процесса), где e_t – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и некоторой дисперсией больше нуля. Начальные условия в (4) выбирались произвольно, поскольку результат моделирования от них не зависит. В первом случае динамику имитировал стационарный случайный процесс e_t , а во втором случае – нестационарный процес. В методе Монте-Карло применим альтернативный способ вычисления p -значений исходных данных. Они определяются рангами, которые занимают значения величин, полученных на реальных данных среди значений, полученных на псевдовыборках. Например, если у нас 5000 реализаций псевдовыборок, то p -значение для реального коэффициента детерминации определяется тем, сколько процентов псевдовыборок имеет большее, чем реальное, значение R^2 , в том числе, $p = 0.05$ соответствует 250-му по величине значению R^2 из псевдовыборки, и нулевая гипотеза отвергается, если реальное R^2 больше, чем 250-е из имитируемых R^2 . В результате вычислений получены значения $R^2_{250} = 0.33$ для e_t и $R^2_{250} = 0.81$ для процесса, описываемого формулой (4). Из таблицы видно, что для всех регионов R^2 намного больше 0.33, и что только для двух (то-есть, для 2.6%) регионов $R^2 < 0.81$. Таким образом, зависимость вида (2) для исследуемых данных при используемых допущениях не может быть объяснена предположением о стохастической нестационарности логарифмов L, K и Y . В этом смысле, моделирование используемых данных функцией Кобба-Дугласа является статистически оправданным.

4 Расчёты по регрессионной модели с вычтенными временными трендами

Одной из причин того, применение формулы Кобба-Дугласа для изучаемых данных даёт высокие значения коэффициента детерминации, является наличие у логарифмов $L,$

K , Y линейных трендов в зависимости от времени, что вносит частичный вклад в явления мультиколлинеарности и регрессии (которая может быть в данном случае в разных пропорциях истинной или ложной в зависимости от характера реальных причинно-следственных связей в моделируемой системе). Ранее в [15] изучалось влияние такого типа трендов посредством добавления в регрессионное соотношение (2) явной зависимости от времени. В настоящей статье для выяснения того, какая часть исследуемой зависимости не объясняется такими трендами, проводились дополнительные расчёты, при которых из значений $Ln(L)$, $Ln(K)$ и $Ln(Y)$ сначала вычитались их регрессионные зависимости от времени (вычисленные по классической модели линейной регрессии), и затем полученные в результате величины подставлялись в (2). В таблице 1 представлены получившиеся в результате значения коэффициента детерминации R_0^2 и результаты расширенного теста Дики-Фуллера остатков регрессии, p -значение, обозначенное как p_{adf0} . Из таблицы видно, что вычитание трендов резко изменяет результат. Результат ADF-теста по-прежнему свидетельствует о нестационарности остатков регрессии. При этом, только 3 значения (или 3.8%) коэффициентов детерминации имеют значения больше 0.81, более того, 23 значения R^2 (или 29%) меньше 0.33, что означает, что оставшуюся после вычитания трендов зависимость не удаётся выделить даже на фоне случайного шума e_t .

Расчёты для данной статьи проводились средствами языка `r`. В частности, расширенный тест Дики-Фуллера вычислялся с использованием функции `adf.test` пакета `ugsa`.

5 Заключение

Монте-Карло моделирование подтвердило высокую вероятность случайного появления выборок, в которых могут быть построены формально достоверные регрессионные модели при фактическом отсутствии какой-либо связи целевой переменной с регрессорами (ложной регрессии). Основополагающую роль в том, что расчёты производственных функций по формуле Кобба-Дугласа дают высокие значения коэффициента детерминации играет наличие линейных трендов по времени у исходных данных. Результаты тестов на коинтеграцию указывают на отсутствие зависимости, что по всей видимости обусловлено тем, что используются слишком короткие ряды данных. Вопрос о том, насколько выявленные тренды обусловлены реальными причинно-следственными связями может быть прояснён только посредством более детального исследования моделируемых систем.

Литература

- [1] Granger C. J., Newbold, P. Spurious regressions in econometrics // Journal of Econometrics, 1974, 2, p. 111–120. doi: [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076\(74\)90034-7](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076(74)90034-7).
- [2] Engle R. F., Granger C. J. Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing // Econometrica, 1987. Vol. 55. № 2. P. 251–276. doi: <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.2307/1913236>.
- [3] Аксянова А. В. Производственные функции в анализе динамики макроэкономических показателей развития региональных экономических систем // Экономические науки, 2009. № 10. С. 153–156.
- [4] Гурьянова Л. С. Применение производственных функций панельных данных в анализе регионального развития // Проблемы экономики, 2012. № 3. С. 187–191.
- [5] Ахметшина Г. А. Построение производственной функции для регионов России с использованием панельных данных // Молодой ученый, 2013. № 11. С. 269–271. <https://moluch.ru/archive/58/8236/>.

- [6] Гафарова Е. А. Моделирование регионального развития на основе производственных функций // Интернет-журнал "Науковедение", № 3. 2013. С. 1–7. <https://naukovedenie.ru/PDF/39evn313.pdf>.
- [7] Бахитова Р. Х., Ахметшина Г. А., Лакман И. А. Панельное моделирование объема выпуска продукции для регионов России // Управление большими системами, 2014. Вып. 50. С. 99–109.
- [8] Зарецкая В. Г., Дремова Л. А., Осиневич Л. М. Построение производственной функции региона с учетом инновационной составляющей // Региональная экономика: теория и практика. 2014. № 2. С. 20–28.
- [9] Магомадов Н. С., Шамилев С. Р. Анализ динамики ВРП регионов РФ производственными функциями // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6. URL: www.science-education.ru/120-15467.
- [10] Гребнев М. И. Построение производственных функций регионов России // ВУЗ. XXI век. 2015. № 2. С. 50–56.
- [11] Аргеновский С. В., Шеховцов Р. В. Приоритеты долгосрочного социально-экономического развития региона: эконометрические модели производственных функций // Региональная экономика: теория и практика, 2016. № 10. С. 147–156.
- [12] <http://www.gks.ru>.
- [13] Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production // American Economic Review, Vol. 18, № 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association (Mar., 1928), P. 139–165.
- [14] Dickey D., Fuller W. A. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root // Econometrica, 1981. Vol. 49. № 4. P. 1057–1072. doi: <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.2307/1912517>
- [15] Кирилюк И. Л. Модели производственных функций для российской экономики // Компьютерные исследования и моделирование, 2013. Т. 5. № 2. С. 293–312.

Поступила в редакцию 03.01.2018

Studies of the relationship between non-stationary time series using the production functions

I. L. Kirilyuk, and O. V. Senko

igokir@rambler.ru; senkoov@mail.ru

¹Institute of Economics of RAS 32, Nakhimovskii pr., Moscow, Russia; ²Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS, 44/2 Vavilova Str., Moscow, Russia

False regression occurs if the standard means of detecting patterns in models, such as the magnitude of the coefficient of determination, indicate the existence of a relationship between variables, while in reality it is absent. The phenomenon of false regression was studied using the Cobb-Douglas model of production functions for time series data for regions of Russian Federation for the period of time 1996-2014. Classical methods of linear regression analysis, such as the F-test or Student’s test, were used together with methods of estimating stationarity and cointegration of variables belonging to multidimensional time series. Additional analysis was implemented by using Monte-Carlo techniques to simulate stationary time series as sequences of independent normally distributed independent random variables. Non-stationary time series, corresponding to unit root autoregression process, were generated, using independent equally distributed increments between previous and subsequent elements of time

series. Statistical validation of regression models received at true data sets is based on comparing their quality with quality of models at stationary or non-stationary multivariate time series, generated under mutual independence of variables. It is shown that the reliability of the dependence expressed by the Cobb-Douglas function is verified not only when using imitation processes of Gaussian white noise, but also when imitating non-stationary autoregression processes with a single root. However using the described method not only to the initial data, but also to data with subtracted time dependence trends showed that effect has no other significant cause than presence of similar linear trends in time series associated with each factor.

Keywords: *spurious regression; Monte Carlo methods; cointegration; production functions*

DOI: 10.21469/22233792.4.3.01

References

- [1] Granger C. J., Newbold P. 1974. Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*. 2: 111–120. doi: [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076\(74\)90034-7](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076(74)90034-7).
- [2] Engle R. F., Granger C. J. 1987. Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing *Econometrica*. Vol. 55. No 2. p. 251–276. doi: <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.2307/1913236>.
- [3] Aksyanova A. V. 2009 Proizvodstvennyye funktsii v analize dinamiki makroekonomicheskikh pokazateley razvitiya regional'nykh ekonomicheskikh sistem [Production functions in the analysis of the dynamics of macroeconomic indicators of the development of regional economic systems]. *Economic sciences*. No 10, p. 153–156. (In Russian)
- [4] Gur'yanova L. S. 2012. Primenenie proizvodstvennykh funktsiy panel'nykh dannykh v analize regional'nogo razvitiya [Application of production functions of panel data in the analysis of regional development]. *The problems of economy*. No 3. p. 187–191. (In Russian)
- [5] Ahmetshina G. A. 2013. Postroenie proizvodstvennoy funktsii dlya regionov Rossii s ispol'zovaniem panel'nykh dannykh [Building a production function for the regions of Russia using panel data]. *Young scientist*. No 11. p. 269–271. URL <https://moluch.ru/archive/58/8236/>. (In Russian)
- [6] Gafarova E. A. 2013. Modelirovanie regional'nogo razvitiya na osnove proizvodstvennykh funktsiy [Modeling regional development based on production functions]. *Internet journal "Science studies"*. No 3. p. 1–7. <https://naukovedenie.ru/PDF/39evn313.pdf>. (In Russian)
- [7] Bahitova R. H., Ahmetshina G. A., Lakman I. A. 2014. Panel'noe modelirovanie ob'ema vypuska produktsii dlya regionov Rossii [Panel modeling of output for the regions of Russia]. *Large-Scale Systems Control*. (In Russian) V. 50. p. 99–109.
- [8] Zareckaya V. G., Dremova L. A., Osinevich L. M. 2014. Postroenie proizvodstvennoy funktsii regiona s uchetom innovatsionnoy sostavlyayushchey [Construction of the production function of the region, taking into account the innovation component]. *Regional Economics: Theory and Practice*. No 2. p. 20–28. (In Russian)
- [9] Magomadov N. S., Shamilev S. R. 2014. Analiz dinamiki VRP regionov RF proizvodstvennymi funktsiyami [Analysis of the dynamics of the GRP of the regions of the Russian Federation production functions]. *Modern problems of science and education*. No 6. URL: www.science-education.ru/120-15467. (In Russian)
- [10] Grebnev M. I. 2015. Postroenie proizvodstvennykh funktsiy regionov Rossii [Construction of production functions of the regions of Russia]. *VUZ. XXI vek*. No 2. p. 50–56. (In Russian)
- [11] Arzhenovskiy S. V., Shekhovcov R. V. 2016. Prioritety dolgosrochnogo sotsial'no-ekonomicheskogo razvitiya regiona: ekonometricheskie modeli proizvodstvennykh funktsiy [Pri-

- orities for the long-term socio-economic development of the region: econometric models of production functions]. *Regional Economics: Theory and Practice*. No 10. p. 147–156. (In Russian)
- [12] <http://www.gks.ru>.
- [13] Cobb C. W., Douglas P. H. 1928. A Theory of Production. *American Economic Review*. Vol. 18. No 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association. p. 139–165.
- [14] Dickey D., Fuller W. A. 1981. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Econometrica*. v.49. No 4. p. 1057–1072. doi: <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.2307/1912517>.
- [15] Kirilyuk I. L. 2013. Modeli proizvodstvennykh funktsiy dlya rossiyskoy ekonomiki [Models of production functions for the Russian economy] // *Computer Research and Modeling*. vol. 5.No 2. p. 293–312. (In Russian)

Received December 03, 2018

Таблица 1 Приложение. Результаты расчётов модели Кобба-Дугласа без вычитания трендов во времени и с их вычитанием во временных рядах.

Регион	A	$\alpha(K)$	$\beta(L)$	R^2	P_{adj}	R_0^2	P_{adj0}
Республика Адыгея	-29.418	1.115	5.202	0.795	0.190	0.205	0.983
Республика Алтай	-14.119	0.886	3.223	0.960	0.046	0.473	0.744
Алтайский край	-45.569	2.086	4.353	0.946	0.268	0.865	0.517
Амурская область	-13.243	1.672	0.532	0.943	0.361	0.086	0.990
Архангельская область	-43.197	1.685	5.179	0.925	0.210	0.440	0.038
Астраханская область	-27.809	0.785	4.726	0.952	0.532	0.510	0.740
Республика Башкортостан	-43.040	1.080	5.477	0.976	0.584	0.784	0.270
Белгородская область	-31.179	1.261	4.136	0.929	0.990	0.572	0.935
Брянская область	-51.455	1.915	6.129	0.945	0.010	0.548	0.634
Республика Бурятия	-17.717	1.296	2.159	0.921	0.829	0.027	0.565
Челябинская область	-31.086	1.198	3.679	0.938	0.171	0.256	0.211
Забайкальский край	2.507	1.403	-1.453	0.952	0.357	0.391	0.210
Чувашская республика	-29.199	1.471	3.437	0.970	0.981	0.306	0.990
Республика Дагестан	-9.807	0.095	2.848	0.972	0.900	0.706	0.284
Еврейская автономная область	-19.332	1.425	3.004	0.954	0.493	0.611	0.910
Хабаровский край	-39.813	1.246	5.433	0.971	0.286	0.393	0.593
Республика Хакасия	-16.600	1.420	1.909	0.963	0.020	0.169	0.108
Республика Ингушетия	-3.492	0.899	0.845	0.965	0.518	0.528	0.090
Иркутская область	-48.375	1.275	6.175	0.935	0.669	0.554	0.602
Ивановская область	-42.601	1.318	5.980	0.941	0.831	0.381	0.695
Республика Саха (Якутия)	15.328	1.534	-3.789	0.917	0.463	0.400	0.511
Ярославская область	-30.919	1.433	3.717	0.967	0.786	0.593	0.682
Кабардино-Балкарская республика	-16.407	1.123	2.444	0.898	0.972	0.531	0.702
Калининградская область	-26.671	1.221	3.778	0.919	0.124	0.279	0.567
Республика Калмыкия	-31.917	0.481	7.532	0.877	0.561	0.235	0.635
Калужская область	-45.884	1.526	6.160	0.941	0.392	0.480	0.023
Камчатский край	-5.908	1.539	-0.273	0.943	0.548	0.012	0.990
Карачаево-Черкесская республика	-16.332	1.592	1.677	0.932	0.726	0.157	0.717
Республика Карелия	-23.292	1.655	2.425	0.941	0.156	0.513	0.232
Кемеровская область	-51.177	1.327	6.379	0.904	0.807	0.848	0.840
Кировская область	-30.812	1.862	2.835	0.973	0.680	0.861	0.261
Республика Коми	-3.215	1.111	0.065	0.951	0.988	0.016	0.990
Костромская область	-16.466	1.844	0.870	0.953	0.398	0.716	0.073
Краснодарский край	-29.200	0.826	3.959	0.982	0.350	0.678	0.760
Красноярский край	-88.819	0.882	12.371	0.900	0.010	0.698	0.990
Курганская область	-9.166	1.423	0.419	0.930	0.109	0.139	0.876
Курская область	-43.742	2.225	4.398	0.931	0.760	0.172	0.990
Ленинградская область	-34.794	0.347	6.230	0.927	0.792	0.698	0.481
Липецкая область	-38.678	1.065	5.807	0.877	0.597	0.338	0.929
Магаданская область	7.459	1.267	-2.555	0.957	0.573	0.389	0.775
Республика Марий Эл	-25.050	2.052	1.975	0.923	0.264	0.469	0.840
Республика Мордовия	-19.169	1.171	2.622	0.955	0.749	0.491	0.649

Регион	A	$\alpha(K)$	$\beta(L)$	R^2	p_{adf}	R_0^2	p_{adf0}
Московская область	-26.403	1.006	3.101	0.977	0.859	0.521	0.910
г. Москва	-17.753	0.383	3.064	0.978	0.839	0.697	0.921
Мурманская область	-37.679	1.126	5.673	0.930	0.038	0.648	0.546
Нижегородская область	-55.167	1.211	6.923	0.944	0.447	0.269	0.591
Новгородская область	-43.962	1.627	6.160	0.936	0.436	0.570	0.971
Новосибирская область	-46.491	0.796	6.741	0.937	0.468	0.371	0.576
Омская область	-61.825	0.179	10.435	0.906	0.599	0.230	0.663
Оренбургская область	-52.874	0.948	7.652	0.962	0.308	0.625	0.250
Орловская область	-30.887	1.626	3.816	0.978	0.727	0.766	0.427
Пензенская область	-38.289	1.590	4.577	0.951	0.381	0.151	0.901
Пермский край	13.443	0.690	-1.438	0.777	0.710	0.740	0.437
г. Санкт-Петербург	-38.709	0.344	5.993	0.970	0.528	0.642	0.706
Приморский край	-55.490	0.928	8.018	0.845	0.855	0.374	0.771
Псковская область	-37.212	1.965	4.221	0.949	0.010	0.493	0.312
Рязанская область	-18.859	1.498	1.827	0.937	0.541	0.302	0.367
Ростовская область	-37.778	1.062	4.749	0.958	0.527	0.518	0.639
Сахалинская область	-31.771	1.220	5.046	0.850	0.496	0.187	0.319
Самарская область	-31.494	1.027	4.072	0.985	0.010	0.802	0.010
Саратовская область	-27.085	1.477	2.779	0.971	0.498	0.661	0.562
Республика Северная Осетия	-20.445	1.829	1.811	0.894	0.029	0.608	0.866
Смоленская область	-35.939	1.311	4.966	0.974	0.083	0.359	0.065
Ставропольский край	-23.492	0.855	3.416	0.978	0.574	0.600	0.491
Свердловская область	-42.324	1.361	4.717	0.962	0.264	0.504	0.818
Тамбовская область	-28.991	1.895	2.722	0.925	0.406	0.114	0.676
Республика Татарстан	-42.345	0.568	6.308	0.939	0.821	0.245	0.968
Тюменская область	-31.436	0.408	5.281	0.967	0.092	0.688	0.068
Томская область	-26.079	1.154	3.751	0.894	0.568	0.578	0.990
Тульская область	-55.645	1.761	6.789	0.918	0.913	0.426	0.720
Тверская область	-40.660	1.565	4.921	0.946	0.227	0.185	0.541
Республика Тыва	-36.319	1.647	6.326	0.862	0.099	0.746	0.542
Удмуртская республика	-60.346	1.035	8.880	0.982	0.063	0.682	0.097
Ульяновская область	-28.365	1.778	2.741	0.932	0.570	0.069	0.846
Владимирская область	-40.788	1.784	4.601	0.914	0.721	0.277	0.761
Волгоградская область	-29.749	1.118	3.818	0.990	0.838	0.729	0.985
Вологодская область	-39.414	0.911	6.161	0.950	0.155	0.738	0.372
Воронежская область	-40.619	1.760	4.288	0.984	0.613	0.437	0.633