Aduenko A.A., Strijov V.V. Joint feature and object selection in multiclass classification of documents // Infocommunication Technologies, 2014, 1 : 47-54.

УДК 519.256

# Совместный выбор объектов и признаков в задачах многоклассовой классификации коллекции документов[1]

А. А. Адуенко, В. В. Стрижов

Работа посвящена задаче ранжирования поисковой выдачи. Для решения этой задачи предложен алгоритм многоклассовой классификации с совместным отбором объектов и признаков, а также его модификация для сравнения релевантности внутри одного класса. Отбор производится двумя способами: с помощью шаговой регрессии и с помощью генетических алгоритмов. Результаты, полученные разными методами, сравниваются. Алгоритм тестируется на синтетических данных и данных поисковой выдачи Яндекса.

*Ключевые слова*: многоклассовая классификация, ранжирование поисковой выдачи, логистическая регрессия, выбор признаков, фильтрация объектов, релевантность.

## 1 Введение

В работе рассматривается задача многоклассовой классификации документов [1, 2]. Документами являются ответы поисковой машины на запросы пользователей. В качестве меток классов используется линейно-упорядоченный набор, отражающий степень релевантности документа запросу. Требуется каждому документу поставить в соответствие число, характеризующее его релевантность запросу. Одними из методов, с помощью которых решают эту задачу являются SVM-регрессия [3] и случайные леса [4]. В данной работе для решения задачи классификации используется многоклассовая логистическая регрессия [5].

Для ранжирования документов по релевантности внутри классов и оценки параметров регрессии предлагается модификация многоклассовой логистической регрессии. В вычислительном эксперименте представлены результаты работы предложенных алгоритмов на данных поисковой выдачи Яндекса [6]. В качестве базового алгоритма, с которым происходит сравнение, используется многоклассовая модификация SVM [7]. Для оценки качества используется Discounted Cumulative Gain [8].

Каждый документ исследуемой коллекции [6] описан $245$ признаками. Обучающая выборка содержит почти $100000$ документов. Поэтому необходимо произвести отбор объектов и признаков. Задача отбора признаков и объектов решается предложенным в работе алгоритмом. В качестве альтернативного решения используется генетический алгоритм [9, 10]. Размер и состав наборов признаков, отобранных обоими алгоритмами, сравниваются.

## 2 Постановка задачи

Задана выборка $D = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}, i \in \mathsf{I} = \{1,\ldots,N\}$, матрица признаков в которой $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}},\ldots,\mathbf{x}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathsf{R}^{N\times n}$, $N$ – число записей данных, а $n$ – число признаков, и вектор ответов $\mathbf{y} = [y_1,\ldots,y_N]^{\mathrm{T}}$, $y_i \in Y \subseteq \mathsf{N}_0$. Здесь $Y$ — линейно-упорядоченное конечное множество, состоящее более, чем из одного элемента.

Для определения принадлежности объектов $\mathbf{x}$ классам $y$ используется модель многоклассовой логистической регрессии — параметрическая функция

$$f : (\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{x}) \to \hat{y} \in Y,$$

отображающая пару “параметры, объект” в метку класса $\hat{y}$ из множества $Y$. Для оценки адекватности модели задачи используется функция качества $S(\boldsymbol{\Theta}, \mathsf{X}, \mathsf{A}, \mathsf{B})$, где $\boldsymbol{\Theta}$ — набор параметров модели, $\mathsf{X}$ — набор индексов некоторого множества объектов, $\mathsf{A}$ — набор индексов используемых признаков, а $\mathsf{B}$ — набор индексов используемых при обучении объектов.

Поиск оптимального набора параметров $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ осуществляется следующим образом:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\Theta}\in\mathsf{R}^L} Q(\boldsymbol{\Theta}, \mathsf{B}, \mathsf{A}, \mathsf{B}),$$

где $L$ — размерность пространства параметров модели. Задачу поиска оптимального наборов объектов и признаков $\{\boldsymbol{\chi}_j\}, j \in \mathsf{A}$, $\{\mathbf{x}_i\}, i \in \mathsf{B}$ запишем в виде

$$(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \operatorname*{argmin}_{\mathsf{A}\subseteq\mathsf{J}, \mathsf{B}\subseteq\mathsf{I}} Q(\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \mathsf{S}, \mathsf{B}, \mathsf{A}).$$

Требуется по обучающей выборке $\mathsf{S}$ оценить параметры $\boldsymbol{\Theta}$ модели, чтобы далее классифицировать объекты в предположении, что из исходного множества признаков — столбцов матрицы $\boldsymbol{\chi} = [\boldsymbol{\chi}_1,\ldots,\boldsymbol{\chi}_n]$ и исходного множества объектов

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Государственного контракта 07.524.11.4002.

$\{\mathbf{x}_i\}, i \in \mathsf{I} = \{1,\ldots,N\}$ отобраны некоторые подмножества признаков $\{\chi_j\}, j \in \mathsf{A}$ и объектов $\{\mathbf{x}_i\}, i \in \mathsf{B}$, оптимальных согласно (3), $|\mathsf{A}| = n^* \le n$, $|\mathsf{B}| = N^* \le N$. Параметр $\Theta$ находится путем максимизации качества модели $Q(\Theta, \mathsf{X}, \mathsf{A}, \mathsf{B})$ на обучающей выборке $S$.

Задача нахождения оптимального набора объектов и признаков решается в работе с помощью предложенного шагового алгоритма и с помощью генетического алгоритма.

## 3 Алгоритм многоклассовой логистической регрессии

Сопоставим каждому классу $C_k, k = 1,\ldots,K$ весовой вектор $\mathbf{w}_k \in \mathsf{R}^n$, где $n$ –число признаков. Тогда для объекта $\mathbf{x}_i$ вероятность попасть в класс $C_k$ в модели логистической регрессии равна

$$P(C_k \mid \mathbf{x}_i) = \frac{\exp \mathbf{w}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_i}{\sum_{j=1}^{K} \exp \mathbf{w}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_i}, i \in \mathsf{I}.$$

Введем для $P(C_k \mid \mathbf{x}_i)$ обозначение $y_{ik}$. Для каждого объекта $\mathbf{x}_i, i \in \mathsf{I}$ введем целевой вектор $\mathbf{t}_i$, где $t_{ik} \in [0,1]$ есть принадлежность объекта $\mathbf{x}_i$ классу $C_k$. В нашем случае на обучающей выборке считаем $t_{ik} = 1$, если объект $\mathbf{x}_i$ лежит в классе $C_k$, иначе $t_{ik} = 0$. Обозначим целевую матрицу, составленную из $t_{ik}$ $\mathbf{T} = [t_{ik}]$. Запишем функцию правдоподобия выборки, используя (4).

$$p(\mathbf{T} \mid \mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{K} P(C_k \mid \mathbf{x}_i)^{t_{ik}} \prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{K} y_{ik}^{t_{ik}}. \quad (5)$$

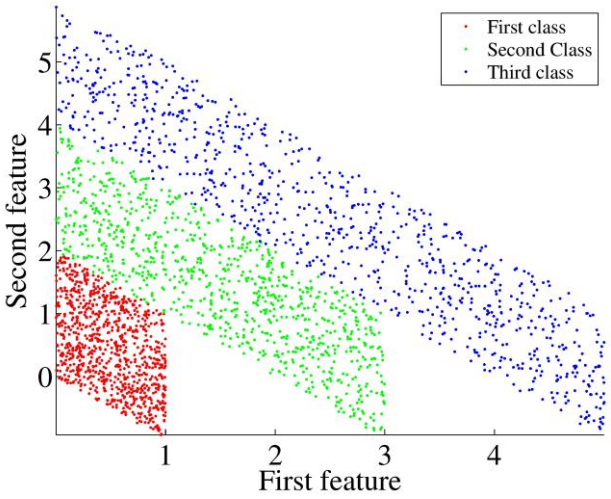
Запишем отрицательный логарифм функции правдоподобия (5) и поставим задачу его минимизации:

$$E(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K) = -\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} t_{ik} \log y_{ik} \to \min_{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K}. \quad (6)$$

Для нахождения минимума функции (6) рассчитаем ее градиент и гессиан. Введем обозначение $a_k^i = \mathbf{w}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_i$. Рассчитаем сначала $\frac{\partial a_k^i}{\partial w_j}$ и $\frac{\partial y_{ik}}{\partial a_j^i}$.

где $I_{kj}$ — $\frac{\partial a_k^i}{\partial w_j} = \mathbf{x}_i \cdot I_{kj}$, элемент единичной матрицы.

Рис. 1: Синтетическая выборка, три класса описаны точками в пространстве двух признаков.



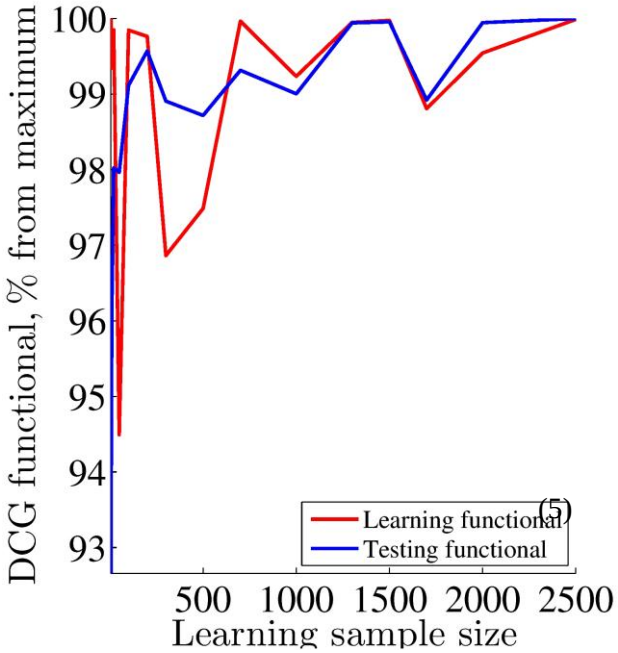




Рис. 2а: Зависимость функционала $Q_2$ от размера обучающей выборки для базового алгоритма.

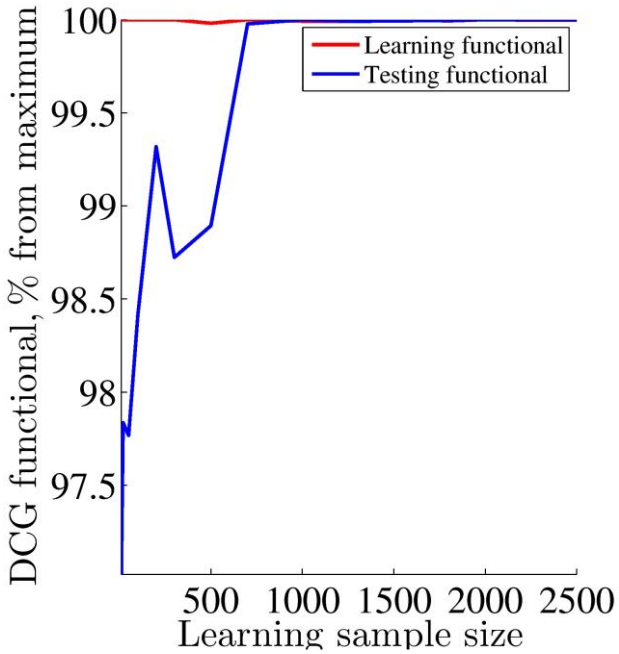



Рис. 2б: Зависимость функционала $Q_2$ от размера обучающей выборки для предложенного алгоритма.

Запишем $y_{ik}$ через $\{a_j^i\}_{j=1}^K$ следующим образом:

$$y_{ik} = \frac{\exp a_k^i}{\sum_{l=1}^K \exp a_l^i}$$

и с учетом (8) получим:

$$\frac{\partial y_{ik}}{\partial a_j^i} = \frac{\exp a_k^i}{\sum_{l=1}^K \exp a_l^i} \cdot \frac{\partial a_k^i}{\partial a_j^i} -$$

$$- \frac{\exp a_k^i}{\left(\sum_{l=1}^K \exp a_l^i\right)^2} \frac{\partial\left(\sum_{l=1}^K \exp a_l^i\right)}{\partial a_j^i} =$$

$$= y_{ik} I_{kj} - y_{ik} y_{ij}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial y_{ik}}{\partial a_j^i} = y_{ik}(I_{kj} - y_{ij}). \quad (9)$$

Из (7) и (9) получаем:

$$\frac{\partial y_{ik}}{\partial \mathbf{w}_j} = \frac{\partial y_{ik}}{\partial a_j^i} \cdot \frac{\partial a_j^i}{\partial \mathbf{w}_j},$$

то есть

$$\frac{\partial y_{ik}}{\partial \mathbf{w}_j} = y_{ik}(I_{kj} - y_{ij})\mathbf{x}_i.$$

Искомый градиент $\nabla_{\mathbf{w}_j} E(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K)$ имеет вид

$$\nabla_{\mathbf{w}_j} E(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K) =$$

$$= -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K t_{ik} \frac{1}{y_{ik}} \frac{\partial y_{ik}}{\partial \mathbf{w}_j} =$$

$$= -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K t_{ik} \frac{1}{y_{ik}} y_{ik}(I_{kj} - y_{ij})\mathbf{x}_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^N t_{ij}\mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^N y_{ij}\mathbf{x}_i \sum_{k=1}^K t_{ik} = \sum_{i=1}^N (y_{ij} - t_{ij})\mathbf{x}_i.$$

Из выражения для градиента (11) и (10) для подматрицы $H_{kj}$ размера $L \times L$ гессиана $H$ получаем:

$$\nabla_{\mathbf{w}_k} \nabla_{\mathbf{w}_j} E(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K) =$$

$$= \nabla_{\mathbf{w}_k} \left( \sum_{i=1}^N (y_{ij} - t_{ij})\mathbf{x}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \nabla_{\mathbf{w}_k} y_{ij} \sum_{i=1}^N y_{ij}(I_{jk} - y_{ik})\mathbf{x}\mathbf{x}^T. \quad (8)$$

Гессиан $H$ есть матрица размера $LK \times LK$ вида

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{K1} & \cdots & H_{KK} \end{pmatrix}.$$

Если бы $H$ была положительно определенной матрицей, то для нахождения оптимального вектора весов можно было бы воспользоваться методом Ньютона-Рафсона:

$$\mathbf{w}^{t+1} = \mathbf{w}^t - \alpha H^{-1} \nabla E, \alpha > 0.$$

Однако из (12) получаем, что в каждой строке матрицы $H$ сумма равна нулю, то есть матрица $H$ вырождена и метод Ньютона-Рафсона не применим. Поэтому в работе используются методы безусловной минимизации первого порядка.

Найдя векторы $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K$, по формуле (4), найдем для каждого объекта $\mathbf{x}_i$ вероятности $P(C_k \mid \mathbf{x}_i)$. Класс $C_{k^*}$, к которому будет отнесен объект $\mathbf{x}_i$ найдем из условия

$$k^* = \underset{k=1,\ldots,K}{\operatorname{argmax}} P(C_k \mid \mathbf{x}_i). \quad (10)$$

Заметим, что алгоритм многоклассовой логистической регрессии,

описанный выше, классифицирует объекты и потому не подразумевает сравнения объектов внутри классов (объекты из разных классов сравнимы, так как метки классов линейно упорядочены). Это ведет к неустойчивой и часто неправильной классификации объектов, у которых несколько классов близки к выполнению (14). Поэтому далее откажемся от требования того, что $\hat{y}_i$ ринадлежит конечному линейно-упорядоченному множеству $Y$, заменив его на требование $\hat{y}_i$ принадлежит отрезку $[C_1, C_K]$, считая как и ранее классы линейно упорядоченными. Тогда рассматриваемая задача перестает быть задачей классификации, а становится задачей регрессии на отрезок. Однако для ее решения можно использовать полученное ранее решение задачи классификации. С учетом линейной упорядоченности меток классов в качестве оценки $\hat{y}_i$ рассмотрим

$$\hat{y}_i = \sum_{k=1}^{K} C_k P(C_k \mid \mathbf{x}_i).$$

## 4 Алгоритмы отбора объектов и признаков

**Пошаговый алгоритм совместного отбора объектов и признаков.**

Вернемся теперь к задаче отбора признаков (3). Предложим алгоритм, позволяющий отбирать не только признаки, но и объекты. В частном случае этого алгоритма, когда отбор объектов не производится, он переходит в алгоритм отбора признаков. Будем пошагово отбирать объекты и признаки для модели многоклассовой логистической регрессии. Отбор признаков будем проводить из всего множества признаков. Для отбора объектов введем два множества $B_1$ и $B_2$. Из $B_1$ происходит отбор множества $\tilde{B}_1 \subseteq B_1$ объектов, которые и будут объектами, по которым будет происходить минимизация (6) и нахождение векторов весов $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K$. По множеству $B_2$ происходит контроль, и решения о добавлении или удалении объектов и признаков будет приниматься по изменению значения оптимизируемой функции $E(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K)$ именно на множестве $B_2$. Различие множеств $B_2$ и $\tilde{B}_1$ позволит избежать минимизации $E(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K)$ исключительно за счет уменьшения размеров множества $\tilde{B}_1$.

Приведем описание алгоритма. Алгоритм на входе имеет 6 параметров $l_1$, $u_1$, $l_2$, $u_2$, $D_1$ и $D_2$, смысл которых будет разъяснен ниже. На начальной этапе задаем множество объектов модели $Y \subseteq X_1$ и множество признаков модели $\mathsf{A} = \{1\}$, где 1 соответствует постоянному признаку. Пусть на очередном шаге значение функции потерь на множестве $X_2$ равно $E$. Затем в имеющуюся модель по очереди добавляем признаки $f_j \in \mathsf{J}$. Для полученных моделей $Y_j = Y, \mathsf{A}_j = \mathsf{A} \cup \{j\}$ считаем значение функции потерь $E_j$ на множестве $X_2$. Находим

$$j^* = \arg\min_j e_j.$$

Вычислим значение критерия $r = \dfrac{E - E_{j^*}}{e}$ (15). Если $r > u_1$, добавляем признак $f_{j^*}$ в модель. Иначе фиксируем признак $f_{j^*}$ и пробуем в новую модель добавить еще один признак, если общее число добавляемых признаков не превышает $D_1$. Критерий добавления остается тем же $r > u_1$, где $r$ рассчитывается уже при добавлении в модель полученного на очередном шаге набора признаков.

Затем пытаемся добавить новый объект в модель аналогично добавлению признака с той разницей, что для принятия решения о добавлении объекта используется параметр $u_2$, а количество добавляемых объектов не превышает $D_2$.

После этого осуществляем поочередно удаление признаков и удаление объектов из модели по аналогичному правилу. С той разницей, что при удалении признаков $r$ рассчитывается по формуле $r = \dfrac{E - E_{j^*}}{E^{j^*}}$, где $j^*$ определяется из условия (16) при $\mathsf{A}_j = \mathsf{A} \setminus \{j\}$. Максимальное число удаляемых признаков также равно $D_1$. Удаление происходит, если $r < l_1$.

Аналогично удалению признаков происходит удаление объектов. С той

разницей, что удаление происходит, если $r < l_2$, а максимальное число удаляемых объектов равно $D_2$. Чтобы алгоритм останавливался, требуется наложить условия $l_1 < r_1$ и $l_2 < r_2$ на значения параметров. Если на очередной итерации не происходит добавление или удаление признаков или объектов, то алгоритм останавливается.

**Генетический алгоритм отбора признаков.**

Рассмотрим обучающую выборку $S$ и поставим задачу отбора множества признаков $\{\chi_j\}, j \in \mathsf{A}$, используемых в логистической регрессии.

$$[\mathsf{A}, \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_K\}] = \\ = \underset{\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K\} \in R^{|\mathsf{A}|}, \mathsf{A} \subseteq \mathsf{J}}{\arg\min} E(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_K). \quad (17)$$

Опишем итеративный алгоритм, который применялся для решения задачи отбора признаков (17). Будем характеризовать набор индексов использующихся признаков $\mathsf{A}$ вектором $\mathbf{b}$ из 0 и 1 размерности $|\mathsf{J}| = n$. Пусть перед $r$-ой итерацией алгоритма есть некоторый набор векторов $V = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_v\}$, где $v = |V|$. Каждому вектору $\mathbf{b}_i$ из $V$ сопоставим число $e_i = \min_{\mathsf{A}=\mathsf{A}(\mathbf{b}_i), \{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K\} \in R^{|\mathsf{A}|}} E(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_K)$.

Исключим из $V$ долю $\alpha$ векторов с наибольшими значениями $e_i$ и заменим их дубликатами векторов с долей $\alpha$ с наименьшими значениями $e_i$. Затем разобьем векторы на пары $\{(\mathbf{b}_{i_k}, \mathbf{b}_{j_k})\}_{k=1}^{\lfloor \frac{v}{2} \rfloor}$ (если $v$ нечетно, то один вектор может остаться без пары). Внутри каждой пары проведем операцию скрещивания, которая заменяет пару векторов на некоторую другую пару векторов. Правила этой замены будут описаны ниже. Затем с каждым из получившихся векторов с вероятностью $p$ происходит мутация, то есть случайный бит $\mathbf{b}$ меняется на противоположный.

Опишем теперь операцию скрещивания. Рассмотрим пару векторов $\mathbf{b}_i = (b_1^i, \ldots, b_n^i)^{\mathrm{T}}, \mathbf{b}_j = (b_1^j, \ldots, b_n^j)^{\mathrm{T}}$.

Сгенерируем случайное натуральное число $z \in 1, \ldots, n$. Тогда результатом операции скрещивания, примененной к векторам $\mathbf{b}_i$ и $\mathbf{b}_j$, будут $\mathbf{b}_i' = (b_1^i, \ldots, b_{z-1}^i b_z^j, \ldots, b_n^j)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{b}_j' = (b_1^j, \ldots, b_{z-1}^j b_z^i, \ldots, b_n^i)^{\mathrm{T}}$.

## 5 Функционал качества многоклассовой классификации

Рассмотрим функционал качества $Q_2$ оценки качества решения задачи. Рассмотрим произвольный запрос $q_j \in Q$, где $Q$ – множество всех запросов, и соответствующие ему документы и оценки их релевантности $\Omega_j = \{\mathbf{x}_i, \hat{y}_i\}, i \in \mathsf{I}_j$. Здесь $\mathsf{I}_j$ задает набор индексов документов, соответствующих запросу $q_j$. Для каждого $q_j$ отсортируем документы внутри $\Omega_j$ по убыванию их оценок релевантности $\mathbf{y}$, получим множество $\Omega_j^*$. При этом документы $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ с одинаковыми оценками релевантности $\hat{y}_i = \hat{y}_j$ располагаются в порядке убывания их реальных релевантностей $y_i$ и $y_j$. Обозначим $\mathrm{ind}(\mathbf{x}_i)$ –номер документа $\mathbf{x}_i$ в $\mathsf{I}$.

В качестве функционала качества будем использовать $DCG$, усредненный по запросам:

$$Q_2(\hat{y}) = \frac{1}{|Q|} \sum_{j=1}^{|Q|} DCG_j,$$

где

$$DCG_j = \sum_{i=1}^{|\Omega_j|} \frac{y_{\mathrm{ind}(\mathbf{x}_i)}}{\log_2 i + 1}.$$

Последняя сумма берется по элементам $\{\mathbf{x}_i, \hat{y}_i\}, i \in \mathsf{I}_j$.

Table 1: Вероятности классов, пример.

| Класс | $\mathbf{x}_1$ | $\mathbf{x}_2$ |
|---|---|---|
| $C_1 = 0$ | 0.3 | 0.05 |
| $C_2 = 1$ | 0.5 | 0.5 |
| $C_3 = 2$ | 0.1 | 0.1 |
| $C_4 = 3$ | 0.05 | 0.3 |
| $C_5 = 4$ | 0.05 | 0.05 |

**Анализ функционала качества DCG (19).**

Рассмотрим произвольный запрос $q$ и два документа $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, относящихся к этому запросу. Предположим, что $K = 5$ и

для $C_1,\ldots,C_5$ вычислены следующие вероятности $P(C_k \mid \mathbf{x}_1)$, $P(C_k \mid \mathbf{x}_2)$, $k = 1,\ldots,5$ по формуле (4) (см. табл. 0).

Оба вектора $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ в соответствии с (14) будут отнесены к классу $C_2$. Однако вектор $\mathbf{x}_2$ следует ранжировать выше, чем $\mathbf{x}_1$, так как для $\mathbf{x}_2$ вероятности попасть во все классы выше $C_2$ не ниже, чем для $\mathbf{x}_1$, а вероятность попасть в класс $C_4$ выше. Это находит отражение и в функционале $DCG$ (19), так как если $y_2 > y_1$, а $\hat{y}_2 = \hat{y}_1$, то значение $DCG_q$ для запроса $q$ будет ниже, чем если бы было выполнено $\hat{y}_2 > \hat{y}_1$. С этой трудностью справляется предложенная модификация алгоритма многоклассовой логистической регрессии. Например, для указанных векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ в соответствии с (15) $1.8 = \hat{y}_2 > \hat{y}_1 = 1.05$. Предположение о том, что модификация логистической регрессии будет лучше в терминах функционала качества $Q_2$ (19), чем исходный алгоритм логистической регрессии подтверждается на эксперименте.

## 6 Вычислительный эксперимент.

Цель вычислительного эксперимента сравнить работу базового алгоритма SVM и предложенного в работе алгоритма. Алгоритмы сравнивались на реальных данных Яндекса [6], а также на синтетической выборке объектов трех классов, обладающей свойством линейной разделимости.

**Синтетическая выборка.**

В качестве синтетической выборки была взята линейно разделимая выборка объектов, принадлежащих трем классам. В выборке было $2700$ объектов, по $900$ объектов каждого класса (см. рис. 1).

В вычислительном эксперименте строилась зависимость функционала качества $Q_2$ (19) от числа элементов в обучающей выборке. Разбиение на обучающую и тестовую выборки осуществлялось случайно. Для каждого размера обучающей выборки проводилось $10$ экспериментов. Полученные значения $Q_2$ усреднялись. На рис. 2 приведем зависимость функционала качества $Q_2$ на обучении и тесте в зависимости от размеров обучающей выборки. В терминах функционала $Q_2$ предложенный алгоритм оказывается более предпочтительным, поскольку в отличие от SVM при размере выборки в $700$ элементов значение $Q_2$ и на обучении, и на контроле равно максимально возможному. Более того, для нахождения весов признаков с помощью алгоритма SVM необходимо решить задачу минимизации для двойственных переменных, количество которых равно числу объектов в обучении, что при большой обучающей выборке весьма затратно. Оптимизация же функции $E(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K)$ в логистической регрессии происходит в пространстве заметно меньшей размерности $d = Km$. Для демонстрации работы пошагового алгоритма отбора объектов и признаков к рассматриваемой синтетической выборке было добавлено $10$ шумовых признаков. В качестве множества $\mathsf{B}_1$ был взят случайный набор из $150$ объектов, по $50$ объектов каждого класса. В качестве множества $\mathsf{B}_2$ был взят случайный набор из $1000$ объектов выборки. Использовались следующие параметры алгоритма
$D_1 = D_2 = 2, l_1 = l_2 = 0, r_1 = r_2 = 0.04$.
Сравнивались два алгоритма: отбор только объектов и отбор объектов и признаков. В обоих случаях все шумовые признаки были отфильтрованы. При отборе и объектов, и признаков было отобрано $97$ из $150$ объектов. Число ошибок классификации на всей выборке в случае с отбором только объектов составило $32$. Для алгоритма отбора и объектов, и признаков — $13$. Полученные результаты говорят о применимости приведенного алгоритма совместного отбора объектов и признаков для задач, где число объектов не слишком велико.

**Реальные данные.**

Реальные данные представляют собой выборку объемом $97290$ объектов, которые относятся к пяти линейно упорядоченным классам $\{0,1,2,3,4\}$. Объекты представляют собой выдачи Яндекса на поисковые запросы. Все признаки нормированы на отрезок $[0,1]$, номера классов соответствуют релевантности полученной выдачи соответствующему запросу. Общее число признаков — $245$.

**Подготовка данных.**

Особенностью представленной

выборки является малое число объектов классов 3 и 4, менее 3% объектов каждого из классов и наличие почти постоянных признаков. Для устранения мультиколлинеарности воспользуемся методом главных компонент [11]. В данной работе были взяты 63 главных компоненты из условия $\frac{\lambda}{\lambda_{max}} > \beta = 3 \cdot 10^{-3}$, где $\lambda_{max}$ — максимальное собственное число матрицы $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$, а $\lambda$ — собственное число, соответствующее рассматриваемой главной компоненте. Кроме того, с учетом малого числа объектов классов 3 и 4 обучающая выборка была дополнительно сбалансирована и содержала примерно одинаковое количество объектов из каждого класса.

**Сравнение логистической регрессии и SVM.**

Приведем значения функционала $Q_2$ при классификации объектов с помощью многоклассовой логистической регрессии и с помощью базового алгоритма SVM (см. табл. 1).

Table 2: Сравнение логистической регрессии и базового алгоритма SVM .

| Алгоритм | Значение $Q_2$ |
|---|---|
| SVM | 3.520 |
| Логистическая регрессия | 3.639 |

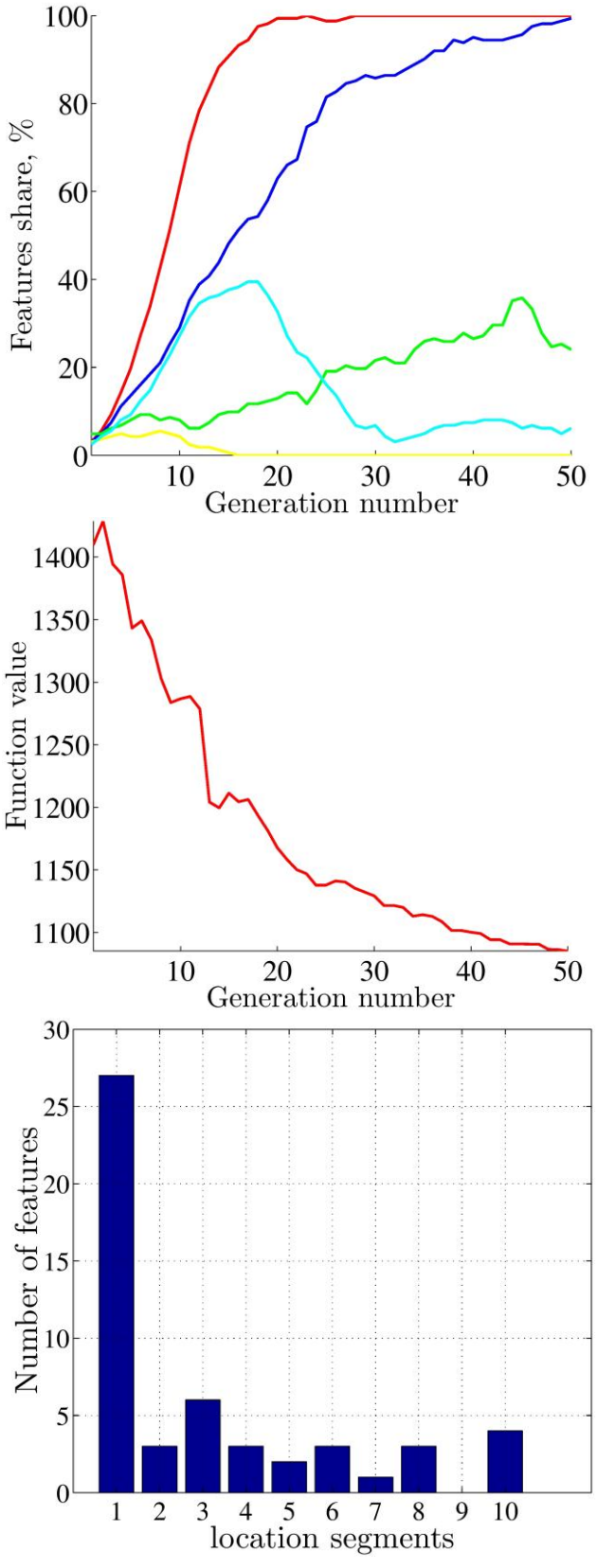
Алгоритм логистической регрессии оказывается более предпочтительным в терминах функционала $Q_2$ (18).

**Отбор объектов и признаков.**

В рассматриваемой задаче отбор объектов в силу их большого числа затратен, а потому не проводился. Проводился лишь отбор признаков. Наборы признаков, отбираемые двумя предложенными в работе алгоритмами, заметно пересекаются, однако при рассматривавшихся параметрах алгоритма шагового отбора он отбирает меньше признаков. Число отобранных признаков и качество классификации в терминах $Q_2$ (19) приведено в табл. 2.

Приведем далее для генетического алгоритма графики зависимости доли объектов с наличием признака в множестве $V$ и минимального на $V$ значения функции потерь $E$ (6) от номера итерации, а также распределение признаков по доли объектов, им обладающих, после 50 итераций генетического алгоритма.

Рис. 3: Результаты работы генетического алгоритма



**Результаты.**

Далее по отобранным наборам признаков решалась задача нахождения векторов весов $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_K$ в соответствии с (6). Затем применялась предложенная модификация алгоритма логистической регрессии. Результаты в терминах $Q_2$ (18) приведены в табл. 2. Полученное значение $Q_2$ 4.058 превосходит baseline, предложенный Яндексом [6]. Это позволяет говорить о перспективности предложенного алгоритма для ранжирования документов. Для сравнения качества с существующими алгоритмами был использован пакет $SVM^{light}$ в режиме построения регрессии. Полученное значение функционала качества DCG равно 4.234 при обучении по всей обучающей выборке. Это на 4.5% выше, чем получено предложенным алгоритмом, потому предложенный алгоритм еще, видимо, можно улучшать.

Table 3: Сравнение качества $Q_2$ для двух алгоритмов отбора признаков.

| Алгоритм отбора | Число призна-ков | $Q_2$ для лог. регрессии | $Q_2$ для модиф. лог. регрессии |
|---|---|---|---|
| Пошаго-вый | 12 | 3.612 | 4.028 |
| Генети-ческий | 18 | 3.639 | 4.058 |

## 7 Заключение

В данной работе рассматривалась задача ранжирования коллекции документов поисковой выдачи. Для ее решения предложен алгоритм многоклассовой логистической регрессии. Предложена его модификация, которая по результатам вычислительного эксперимента значительно улучшает качество ранжирования в терминах функционала $DCG$. Также рассмотрен алгоритм пошагового отбора объектов и признаков. По качеству ранжирования на отобранных признаках он не уступает рассматривавшемуся в работе генетическому алгоритму.

## Литература


[1] *Bishop C. M.* Pattern recognition and machine learning. // Springer, 2006.

[2] *Bishop C. M., Nasrabadi N. M.* Pattern recognition and machine learning. // Journal of electronic imaging, 2007. Vol. 16. No. 4.

[3] *Joachims T.* Optimizing search engines using clickthrough data. // Proceedings of the eighth ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery and data mining. New York: ACM, 2002. Pp. 133-142.

[4] *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The elements of statistical learning: data mining, inference and prediction. // Berlin: Springer, 2001.

[5] *Friedman J., Hastie T., Tibshirani R.* Additive logistic regression: a statistical view of boosting. // The annals of statistics, 2000. Vol. 28. No. 2. Pp. 337-374.

[6] Данные поисковой выдачи Яндекса. // http://imat2009.yandex.ru.

[7] *Kumar M. A., Gopal M.* Fast multiclass SVM classification using decision tree based on one-against-all method. // Neural processing letters, 2010. Vol. 32. No. 3. Pp. 311-323.

[8] *Jarvelin K., Kekalainen J.* IR evaluation methods for retrieving highly relevant documents. // In proceedings of the 23rd annual international ACM SIGIR conference and development in information retrieval, 2000. Pp. 41-48.

[9] *Oh I. S., Lee J. S., Moon B. R.* Hybrid genetic algorithms for feature selection. // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2004. Vol. 26. No. 11. Pp. 1424–1437.

[10] *Leardi R., Boggia R., Terrile M.* Genetic algorithms as a strategy for feature selection. // Journal of chemometrics, 1992. Vol. 6. No. 5. Pp. 267–281.

[11] *Jolliffe I. T.* Principle Component Analysis. // New York: Springer, 2002.