Generation of expertly-interpreted models for prediction of core permeability[1]

A. M. Bochkarev[2], I. L. Sofronov[3], V. V. Strijov[4]

Abstract: This article is devoted to prediction of core permeability. Permeability is one of the main property for estimation of filtration of gas and liquid in core. To build permeability model, porosity, density, depth of measurement and other core physical properties are used. Algorithm for choosing optimal prediction model is proposed. Model of superpositions of expertly-defined functions is suggested. The proposed method is a superposition of previously obtained optimal expetly-defined functions and two-layer neural network. The experiment on core analysis, aero- and hydrodynamics datasets is conducted. During the experiment, optimal expertly-interpreted models for all datasets are derived. Suggested approach is compared to other method for choosing models such as Lasso regression, SVR, gradient boosting and neural network. The error and optimal parameters estimation was conducted using cross-validation. The experiment showed that proposed approach is competitive with other state-of-the-art methods. Moreover, the number of neurons is significantly reduced with the use of superpositions of expertly-defined functions.

Keywords: core permeability, generation of superposition, symbolic regression, neural network, SVR, Lasso, gradient boosting

---

[1] This publication is funded by the Russian Foundation for Basic Research, award number 16-07-01155; Russian Science Foundation, award number 15-11-00015

[2] Moscow Institute of Physics and Technology, artem.bochkarev@phystech.edu

[3] Moscow Institute of Physics and Technology, ISofronov@slb.com

[4] Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, strijov@ccas.ru

О дуализации над произведением частичных порядков*

Е. В. Дюкова[1]***, Г. О. Масляков***[2]***, П. А. Прокофьев***[1]

edjukova@mail.ru, gleb-mas@mail.ru, p_prok@mail.ru

[1] ФИЦ ИУ РАН, Вычислительный центр имени А. А. Дородницина, г. Москва, Вавилова 40

[2] МГУ им. Ломоносова, г. Москва, Ленинские горы 1

Рассматривается одна из центральных труднорешаемых задач дискретной математики — дуализация над произведением частичных порядков. Исследуется важный частный случай, когда каждый порядок является цепью. Показывается, что поставленная задача сводится к поиску неприводимых покрытий булевой матрицы (дуализации булевой матрицы), специальным образом построенной по исходным данным. Приводятся результаты численных экспериментов, базирующиеся на эффективном «в типичном случае» асимптотически оптимальном поиске неприводимых покрытий булевой матрицы. Ранее для решения рассматриваемой задачи предлагался подход, представляющий интерес в основном для теории и имеющий целью построение инкрементальных алгоритмов с квазиполиномиальными временными оценками «для худшего случая».

Ключевые слова: *дуализация; произведение частичных порядков; цепь; покрытие булевой матрицы; ассимптотически оптимальный алгоритм*

DOI: 10.21469/22233792

1 Введение

Пусть на конечном множестве P задано отношение частичного порядка. Для обозначения того, что $y \in P$ следует за $x \in P$, будем использовать запись вида $x \preceq y$. В случае, когда $x \preceq y$ и $x \neq y$, будем писать $x \prec y$.

Частичный порядок подразумевает выполнения свойств рефлексивности, транзитивности и антисимметричности:

1) $x \preceq x, \ \forall x \in P$;
2) $x \preceq y, \ y \preceq z \Rightarrow x \preceq z, \ \forall x, y, z \in P$;
3) $x \preceq y, \ y \preceq x \Rightarrow x = y, \ \forall x, y \in P$.

Элемент $a \in R, \ R \subseteq P$, называется максимальным элементом R, если для любого $x \in R$ отношение $a \prec x$ не выполняется. Обозначим через $\max(R)$ множество всех максимальных элементов множества R. Заметим, что $\max(R)$ — антицепь, то есть любые два различные элементы из R не сравнимы. Аналогично определяются минимальный элемент R и множество минимальных элементов $\min(R)$. Заметим, что $\min(R)$ тоже является антицепью.

Пусть $R^+ = \{x \in P | \exists a \in R, \ a \preceq x\}$ и $R^- = \{x \in P | \exists a \in R, \ x \preceq a\}$. Элемент $x \in P \setminus R^+$ называется независимым от R. Множество $\max(P \setminus R^+)$ состоит из максимальных независимых от R элементов и обозначается $I(R)$. Множество элементов R задаёт разбиение $P = R^+ \cup I(R)^-, R^+ \cap I(R)^- = \varnothing$, поэтому $I(R)$ называется двойственным к R.

Пусть $P = P_1 \times \ldots \times P_n$, где $P_1, \ldots, P_n$ — частично упорядоченные множества, и отношения частичного порядка на P определяется следующим образом. Для элементов $x = (x_1, \ldots, x_n), \ y = (y_1, \ldots, y_n) \in P$ верно отношение $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты №16-01-00445

одновременно выполняются отношения $x_1 \preceq y_1, \ldots, x_n \preceq y_n$. Рассматривается задача перечисления элементов $I(R),\ R \subseteq P$. Эта задача называется дуализацией над произведением частичных порядков.

Одним из наиболее востребованных случаев является случай цепей, т. е., когда любые два элемента P_i сравнимы. Если $P_i = \{0, 1\}$, то рассматриваемая задача — это перечисление максимальных независимых подмножеств вершин гиперграфа, которое эквивалентно построению сокращённой ДНФ монотонной булевой функции, заданной КНФ. Если R состоит из попарно несравнимых элементов, то дуализация монотонной булевой функции, — это построение множества «нижних» единиц этой функции при условии, что задано множество её «верхних» нулей.

Важным приложением дуализации монотонной булевой функции является поиск неприводимых покрытий булевой матрицы. Обобщением дуализации булевой матрицы является перечисление так называемых тупиковых σ-покрытий целочисленной матрицы. Поиск тупиковых σ-покрытий целочисленной матрицы с элементами из $\{0, 1, \ldots, k-1\},\ k \geqslant 2$, эквивалентен построению сокращённой дизъюнктивной нормальной формы двузначной функции k-значной логики, заданной множеством нулей. Задача дуализации целочисленной матрицы, в частности булевой матрицы, возникает при конструировании логических процедур классификации по прецедентам.

Теоретические оценки эффективности алгоритмов дуализации базируются на оценке сложности одного шага. Наиболее эффективным считается алгоритм, который имеет полиномиальный от размера входа шаг. Хотя задача поставлена ещё в 60-х годах прошлого века, полиномиальные алгоритмы удалось построить лишь для некоторых частных случаев дуализации. Поэтому требования к алгоритму были ослаблены. Обозначились два направления исследований.

Первое направление, разрабатываемое в основном за рубежом, основано на построении так называемых инкрементальных алгоритмов, когда алгоритму разрешено просматривать решения, найденные на предыдущих шагах. При этом оценки сложности шага алгоритма даются для худшего случая (для самого сложного варианта задачи). В 1995 году Л. Хачияну с соавторами удалось построить алгоритм дуализации монотоной булевой функции с квазиполиномиальным шагом, определяемым не только размером входа задачи, но и размером её выхода. Такой алгоритм интересен исключительно для теории, поскольку в худшем случае число решений дуализации (размер выхода задачи) растёт экспоненциально с ростом размера её входа.

Второе направление исследований (предложено Е.В. Дюковой около 40 лет назад) основано на построении асимптотически оптимальных алгоритмов поиска неприводимых покрытий булевой матрицы. В этом случае алгоритму разрешено делать лишние полиномиальные шаги при условии, что их число должно быть достаточно мало по сравнению с числом всех решений задачи (числом неприводимых покрытий булевой матрицы). В результате удалось построить алгоритмы эффективные в типичном случае (эффективные для почти всех вариантов задачи). Эти алгоритмы имеют теоретическое обоснование и показывают хорошие результаты на практике.

В настоящее время отечественные асимптотически оптимальные алгоритмы поиска неприводимых покрытий булевой матрицы являются мировыми лидерами по скорости счёта [?]. Эти алгоритмы позволяют решать задачи значительных размеров, что подтверждают эксперименты на большом количестве разнотипных данных. Данные для тестирования предоставлены японскими учёными T. Uno и K. Murakami [?]. Следует отметить, что алгоритмы дуализации гиперграфа, предложенные в [?], являются в силу эквивалентности задач асимптотически оптимальными алгоритмами поиска неприводимых покрытий булевой матрицы. Однако эти алгоритмы, а также другие известные алгоритмы дуализации гиперграфа, имеющие иные конструктивные особенности, уступают по скорости счёта последним отечественным разработкам, представленным в [?].

В работе [?] для случая, когда каждое P_i является цепью и $|P_i| \geqslant 2$, на базе алгоритма, предложенного в [?], построен квазиполиномиальный инкрементальный алгоритм. В настоящей работе рассматривается случай $P_i = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, n$, и элементы P_i упорядочены в порядке возрастания. Задача сводится к построению так называемых упорядоченных тупиковых σ-покрытий целочисленной матрицы, строками которой являются наборы из R^+.

Понятие тупикового σ-покрытия целочисленной матрицы введено в [?], [?] и, как уже было отмечено выше, является обобщением неприводимого покрытия булевой матрицы. Множество $\overrightarrow{B(L)}$ упорядоченных тупиковых σ-покрытий целочисленной матрицы L является подмножеством множества $B(L)$ всех тупиковых σ-покрытий этой матрицы.В [?] для построения $B(L)$ предложено решение, основанное на построении специальных неприводимых покрытий для булевой матрицы, построенной по исходной целочисленной матрице. Аналогичный приём применяется в настоящей работе для построения $\overrightarrow{B(L)}$. Целочисленная матрица L размера $m \times n$ преобразуется в булеву матрицу L^* размера $m \times kn$. Показывается, что исходная задача сводится к построению некоторого подмножества множества неприводимых покрытий матрицы L^*. Для поиска искомых неприводимых покрытий используется модификация асимптотически оптимального алгоритма поиска неприводимых покрытий булевой матрицы RUNC-M из [?].

2 Основные понятия

Пусть L — матрица размера $m \times n$ с элементами из $\{0, 1, \ldots k-1\}$, $k \geqslant 2$; E_k^r, $r \leqslant n$ — множество всех наборов вида $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, где $\sigma_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, при $i = 1, 2, \ldots, r$.

Рассмотрим $\sigma \in E_k^r$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_i < k-1$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Через $Q_t^*(\sigma)$, $t \in \{1, \ldots, r\}$, обозначим множество всех наборов $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ в E_k^r таких, что β_t непосредственно следует за σ_t и $\beta_j = \sigma_j$ при $j \in \{0, 1, \ldots, r\} \setminus \{t\}$.

Упорядоченным тупиковым σ-покрытием матрицы называется набор H из r различных столбцов этой матрицы такой, что подматрица L^H матрицы L, образованная столбцами набора H, обладает следующими двумя свойствами: 1) L^H не содержит строку вида $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$; 2) если $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$, то L^H содержит хотя бы одну строку из множества $Q_t^*(\sigma)$.

Упорядоченное тупиковое $(0, 0, \ldots, 0)$-покрытие H булевой матрицы L, матрицы называется неприводимым покрытием. Если L — булева матрица, $\sigma = (0, \ldots, 0)$ и выполнено условие 1), то H — покрытие матрицы L (H покрывает строки матрицы L). Если L булева матрица, $\sigma = (0, \ldots, 0)$ и выполнено условие 2), то H — совместимый набор столбцов матрицы L . Если же условие 2) не выполнено, то H — несовместимый набор столбцов матрицы L . Совместимый набор столбцов булевой матрицы называется максимальным, если он не содержится ни в каком другом совместимом наборе столбцов этой матрицы.

Пусть H — совместимый набор столбцов булевой матрицы L. Будем говорить, что столбец h матрицы L совместим с H, если $H \cup \{h\}$ — совместимый набор столбцов матрицы L.

Подматрица булевой матрицы называется единичной, если в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы в точности один элемент равен 1. Единичная подматрица булевой матрицы L называется максимальной, если она не содержится ни в какой другой единичной подматрице матрицы L . Из условия H — максимальный совместимый набор столбцов матрицы L длины r следует, что L^H содержит хотя бы одну максимальную единичную подматрицу порядка r.

Будем говорить, что строка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ булевой матрицы L охватывает строку $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ этой матрицы, если $a_j \geqslant b_j$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Заметим что, множество $(0, 0, \ldots, 0)$-покрытий булевой матрицы не меняется при выбрасывании из нее охватывающих строк.

Пусть $P = P_1 \times \ldots \times P_n,\ P_i = \{0, 1, \ldots, k-1\},\ k \geqslant 2,\ R \subseteq P$. Обозначим через L_R матрицу, строками которой являются элементы множества R, через L_{R^+} матрицу, строками которой являются элементы множества R^+.

Пусть $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — набор из P, в котором элемент с номером t, $t \in \{j_1, \ldots, j_r\}$, не является максимальным в P_t ,а элемент с номером t, $t \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$, является максимальным в P_t. Очевидным является

Утверждение 1. *Набор σ является максимальным независимым от R набором тогда и только тогда, когда набор столбцов матрицы L_{R^+} с номерами $j_1, \ldots, j_r$ является упорядоченным тупиковым $(\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_r})$-покрытием.*

При $k = 2$ матрица L_R получается из матрицы L_{R^+} удалением охватывающих строк, поэтому из утверждения **??** сразу следует

Утверждение 2. *Если $k = 2$, то набор σ является максимальным независимым от R набором тогда и только тогда, когда набор столбцов матрицы L_R с номерами $j_1, \ldots, j_r$ является неприводимым покрытием.*

3 Сведение задачи построения упорядоченных тупиковых σ-покрытий целочисленной матрицы к задаче построения неприводимых покрытий булевой матрицы

Пусть $L = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ — матрица с элементами из $\{0, 1, \ldots, k-1\},\ k \geqslant 2$. Пусть $a \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Положим

$$\delta(a_{ij}, a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{ij} > a, \\ 0, & \text{если } a_{ij} \leqslant 0, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Построим булеву матрицу L^*, состоящую из m строк и $k \times n$ столбцов, в которой строка с номером i, $i = 1, 2, \ldots m$, имеет вид

$$(\delta(a_{i1}, 0), \ldots, \delta(a_{i1}, k-1), \delta(a_{i2}, 0), \ldots, \delta(a_{i2}, k-1), \ldots, \delta(a_{in}, 0), \ldots \delta(a_{in}, k-1)).$$

Нетрудно заметить, что столбцу с номером j, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, исходной матрицы L соответствует группа из k столбцов матрицы L^* с номерами $k(j-1)+1,\ k(j-1)+2, \ldots,\ kj$. Столбцы с номерами $k(j-1)+1,\ k(j-1)+2, \ldots,\ kj$ назовем родственными. Через $P(L^*)$ обозначим множество всех неприводимых покрытий матрицы L^*. Несложно доказывается

Утверждение 3. *Набор из r различных столбцов матрицы L с номерами $j_1,\ j_2, \ldots, j_r$ является упорядоченным тупиковым $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$-покрытием, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in E_k^r$, $\sigma_i < k - -1,\ i = 1, 2, \ldots r$ тогда и только тогда, когда выполнены два следующих условия:* 1) *набор столбцов матрицы L^* с номерами $t_1, t_2, \ldots, t_r$, где $t_i = (j_i - 1)k + \sigma_i + 1$, принадлежит*

$P(L^*)$; 2) *если* $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ *и* $t_i < kj_i$, *то в* $P(L^*)$ *нет набора столбцов с номерами* $t_1, \ldots, t_{i-1}, q_i, t_{i+1}, \ldots, t_r$, где $q_i \in [t_i + 1, kj_i]$.

Из утверждения **??** следует, что задача построения множества $P(L)$ сводится к построению подмножества $\widetilde{P}(L^*)$ множества $P(L)$, состоящего из всех таких неприводимых покрытий, которые, во-первых, не содержат столбцов с родственными номерами и, во-вторых, удовлетворяют некоторому дополнительному условию (условию 2), которое назовём условием старшинства. Элементы множества $\widetilde{P}(L^*)$ назовём правильными неприводимыми покрытиями матрицы L^*.

4 Асимптотически оптимальный алгоритм поиска неприводимых покрытий булевой матрицы

Асимптотически оптимальный алгоритм A построения множества всех неприводимых покрытий $P(L)$ булевой матрицы L размера $m \times n$ действует по следующей схеме. На каждом шаге строится максимальный совместимый набор столбцов H матрицы L. Некоторые максимальные совместимые наборы столбцов могут строиться неоднократно. Проверка на повторяемость осуществляется путём просмотра строк подматрицы L^H матрицы L, образованной столбцами набора H. При этом на каждом шаге выполняется не более, чем d элементарных операций, где d ограничено сверху полиномом от m и n. Под элементарной операцией понимается просмотр одного элемента матрицы. Основное требование: число шагов $N_A(L)$ алгоритма A должно быть асимптотически равно $|P(L)|$ при $n \to \infty$ для почти всех булевых матриц L размера $m \times n$ (здесь и далее $|N|$ — мощность множества N). Указанное требование означает следующее. Существуют две положительные бесконечно убывающие функции $\alpha(n)$, $\beta(n)$ такие, что для всех достаточно больших n имеет место

$$\frac{|1 - M|}{|M_{mn}|} \leqslant \alpha(n),$$

где M_{mn} — множество всех булевых матриц размера $m \times n$, M — множество матриц L из M_{mn} для которых выполнено

$$1 - \beta(n) \leqslant \frac{|P(L)|}{N_A(L)} \leqslant 1 + \beta(n).$$

Таким образом, асимптотически оптимальный алгоритм дуализации булевой матрицы имеет «лишние» полиномиальные шаги. Шаг считается лишним в двух случаях: 1) построенный максимальный совместимый набор столбцов H уже строился на предыдущих шагах; 2) набор столбцов H ранее не строился, но он не является покрытием. Для почти всех булевых матриц размера $m \times n$ число лишних шагов должно иметь более низкий порядок роста по сравнению с числом неприводимых покрытий при росте размера задачи.

Рассматриваемые алгоритмы поиска неприводимых покрытий булевой матрицы L построены для случая, когда число строк матрицы L существенно меньше числа её столбцов. Обоснование подхода опирается на технику получения асимптотических оценок числа неприводимых покрытий, которая первоначально была предложена в работах В.А. Слепян и В.Н. Носкова, а затем развита в работах Е.В. Дюковой [**?**] и А.Е. Андреева [**?**]. В частности, в было показано, что при $\log m \leqslant (1 - \varepsilon) \log n, 0 < \varepsilon < 1, n \to \infty$, для почти всех булевых матриц L размера $m \times n$ число единичных подматриц матрицы L асимптотически равно мощности $P(L)$. Построенный в [**?**, **?**] асимптотически оптимальный алгоритм дуализации АО1 основан на перечислении максимальных единичных подматриц булевой матрицы. Данный алгоритм строит каждый максимальный совместимый набор столбцов столько раз, сколько максимальных единичных подматриц содержит матрица L^H и имеет лишние шаги обоих указанных выше видов (на каждом шаге осуществляется проверка того, что набор столбцов H ранее не строился и он является покрытием). Сложность шага алгоритма равна $O(qmn)$, где $q = min(m, n)$. Впоследствии были построены алгоритмы с лишними шагами только одного вида. Среди этих алгоритмов следует выделить отечественные алгоритмы АО2 [?] , ОПТ [?] и RUNC-M [?]. Алгоритм АО2 является модификацией алгоритма АО1 и основан на перечислении только тех максимальных единичных подматриц булевой матрицы, которые порождают неприводимые покрытия (не осуществляет проверку на покрываемость). Лишний шаг в АО2 — это повторно построенное неприводимое покрытие. Алгоритмы ОПТ и RUNC-M не имеют повторяющихся шагов.

Для наглядности работу асимптотически оптимального алгоритма дуализации булевой матрицы L можно представить в виде обхода дерева решений (ДР) в глубину: корнем ДР является пустой набор; вершины — совместимые наборы столбцов; висячие вершины — максимальные совместимые наборы столбцов, которые либо являются впервые найденными неприводимыми покрытиями, либо соответствуют лишним шагам.

Первоначально матрица L рассматривается в качестве текущей матрицы. Построение ДР начинается с вершины, которая порождается некоторым ненулевым столбцом матрицы L. При построении каждой из остальных вершин в роли текущей матрицы выступает подматрица матрицы L. Для построения дочерней вершины внутренней вершины H алгоритм по определённому правилу выбирает в текущей матрице ненулевой столбец и строит новую вершину $H \cup h$, где h - соответствующий столбец матрицы L. После построения вершины $H \cup h$ текущая матрица изменяется. Из неё, как правило, удаляются все строки, покрытые выбранным столбцом, и удаляются столбцы, порождённые теми столбцами матрицы L, которые несовместимы с набором $H \cup h$. Дополнительно могут удаляться и другие строки и столбцы. Если новая текущая матрица не содержит единичных элементов, то вершина $H \cup h$ становится висячей. Если набор $H \cup h$ найден впервые и является покрытием, то множество неприводимых покрытий, построенных на предыдущих шагах, пополняется, в противном случае это множество не меняется и шаг объявляется лишним. В любом случае далее либо происходит переход к новому шагу путём возврата на более высокий уровень ДР, либо алгоритм заканчивает работу. Если же новая текущая матрица содержит единичные элементы, то $H \cup h$ - внутренняя вершина ДР и процесс построения ветви дерева продолжается.

Время работы асимптотически оптимального алгоритма в большой степени зависит от сложности ДР (числа вершин в ДР), которое строит этот алгоритм.

На данный момент наилучшие результаты по скорости счёта показывает алгоритм RUNC-M. Этот алгоритм строит каждый максимальный совместимый набор только один раз. В RUNC-M применяется «жадная» стратегия выбора столбцов для построения дочерних вершин в ДР. Всякий раз после построения очередной внутренней вершины H в текущей матрице выбирается строка i, имеющая наименьшее число единиц. Дочерняя для H вершина строится путём добавления к набору H столбца матрицы L , имеющего наименьший номер среди столбцов, образующих текущую матрицу и покрывающих строку i. Сложность шага алгоритма $O(qmn), q = min(m, n)$.

5 Алгоритм дуализации произведения цепей RUNC-M+

Согласно утверждению **??** поиск максимальных независимых от R наборов сводится к поиску упорядоченных тупиковых σ-покрытий матрицы L_{R+}.

Преобразуем матрицы L_R и L_{R+} соответственно в булевы матрицы L^*_R и L^*_{R+} способом, описанным в п. 2. Согласно утверждению **??**, поиск упорядоченных тупиковых σ-покрытий матрицы L_{R+} сводится к поиску правильных неприводимых покрытий матрицы L^*_{R+}. Нетрудно видеть, что каждая строка из L^*_{R+} , не содержащаяся в L^*_R, охватывает хотя бы одну строку из L^*_R. Следовательно, набор столбцов с номерами $\mathrm{j}_1, \ldots, j_r$ матрицы L^*_{R+} является неприводимым покрытием тогда и только тогда, когда набор столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_r$ матрицы L^*_R является неприводимым покрытием.

Построенный в настоящей работе алгоритм поиска правильных неприводимых покрытий матрицы L^*_{R+} является модификацией алгоритма дуализации булевой матрицы RUNC-M и назван RUNC-M+.

Алгоритм RUNC-M+ описывается ниже рекурсивной процедурой RUNCM $(L^*_R; H; D; C)$, первый вызов которой осуществляется с параметрами $H = \varnothing$, $D = \{1, 2, \ldots, m\}$, $C = \{1, 2, \ldots, kn\}$.

Процедура RUNCM $(L^*_R; H; D; C)$

1: $C^{min} := \{j \in C | a_{ij} = 1\}$, где i – номер строки из D с минимальным числом элементов, равных 1
2: **для всех** $j \in C^{min}$
3:    $C := C \setminus \{j\}$
4:    $H := H \cup \{j\}$
5:    Исключить из D номера строк, покрытых столбцом с номером j
6:    **если** $D = \varnothing$ и набор столбцов с номерами из H удовлетворяет условию старшинства **то**
7:       Сохранить в $P(L^*_R)$ набор столбцов с номерами из H (найден новый элемент из $P(L^*_R)$)
8:    **иначе**
9:       **если** $D \neq \varnothing$ **то**
10:          Исключить из C номера столбцов, не совместимых со столбцами с номерами из H
11:          **если** $C \neq \varnothing$ **то**
12:             Вызвать RUNCM(L^*_R, H, D, C)
13:    Отменить изменения, внесённые на шагах $4, 5$

6 Эксперименты

Были проведены эксперименты с целью выяснить, как меняется время работы алгоритма RUNC-M+ в случае с определёнными конфигурациями матриц, а именно с «вытянутыми» по горизонтали, с «вытянутыми» по вертикали и с квадратными. Также исследовалось влияние размерности частичного порядка на время счёта. Для экспериментов генерировались случайные матрицы, причём каждый элемент матрицы генерировался независимо из равномерного дискретного распределения. Среднее время работы алгоритма бралось по 20-ти независимым матрицам.

В таблице **??** приведены результаты работы алгоритма в зависимости от размера целочисленной матрицы L_R и размерности частичного порядка.

Таблица 1

Размер/ значность k матрицы L_R	Размер матрицы L_R^*	Время работы алгоритма RUNC-M+ (в секундах)
$20 \times 30/\ 3$	20×90	1.784
$20 \times 35/\ 3$	20×105	5.152
$20 \times 40/\ 3$	20×120	14.226
$20 \times 45/\ 3$	20×135	39.862
$10 \times 10/\ 3$	10×30	0.0000033
$15 \times 15/\ 3$	15×45	0.01
$20 \times 20/\ 3$	20×60	0.113
$25 \times 25/\ 3$	25×75	1.014
$30 \times 30/\ 3$	30×90	15.183
$30 \times 20/\ 3$	30×60	0.26
$35 \times 20/\ 3$	35×60	0.01
$40 \times 20/\ 3$	40×60	0.000768
$45 \times 20/\ 3$	45×60	0.000385
$30 \times 20/\ 4$	30×80	2.216
$35 \times 20/\ 4$	35×80	2.985
$40 \times 20/\ 4$	40×80	3.546
$45 \times 20/\ 4$	45×80	6.728
$10 \times 20/\ 2$	10×40	0.005
$10 \times 20/\ 3$	10×60	0.454
$10 \times 20/\ 4$	10×80	0.112
$10 \times 20/\ 5$	10×100	0.446
$10 \times 20/\ 6$	10×120	0.714
$10 \times 20/\ 7$	10×140	1.871
$10 \times 20/\ 8$	10×160	1.164
$10 \times 20/\ 9$	10×180	2.532
$10 \times 20/\ 10$	10×200	5.788
$20 \times 10/\ 2$	20×20	0.012
$20 \times 10/\ 3$	20×30	0.169
$20 \times 10/\ 5$	20×50	0.032
$20 \times 10/\ 7$	20×70	0.138
$20 \times 10/\ 10$	20×100	0.372
$20 \times 10/\ 15$	20×150	2.384
$20 \times 10/\ 20$	20×200	4.0258

При исследовании времени работы алгоритма на «вытянутых» по вертикали матрицах было замечено, что на определённом этапе увеличение числа строк приводит к резкому увеличению скорости работы алгоритма. По-видимому, это происходит из-за существенного уменьшения числа правильных неприводимых покрытий матрицы L_R^*. Примеры данного эффекта приведены в таблице **??** (рассмотрен случай, когда значность k матрицы L_R равна 3).

Таблица 2

Размер матрицы L_R	Размер матрицы L_R^*	Время работы алгоритма RUNC-M+(в секундах)	Среднее значение $\lvert\widetilde{P}(L_R^*)\rvert$
31×20	31×60	0.61	93750
32×20	32×60	0.68	108840
33×20	33×60	0.144	11160
34×20	34×60	0.033	2800
35×20	35×60	0.015	1120
64×25	64×75	26.189	2937850
65×25	65×75	2.5	239950
66×25	66×75	0.922	94090
67×25	67×75	0.122	12530
68×25	68×75	0.085	8730
98×40	98×120	35.013	6181120
99×40	99×120	4.626	754050
100×40	100×120	1.198	190560
101×40	101×120	0.612	99240
102×40	102×120	0.019	3100

Из результатов эксперимента видно, что время работы алгоритма RUNC-M+ в большей степени зависит от числа столбцов, чем от числа строк. При увеличении числа столбцов наблюдался экспоненциальный рост времени работы. Кроме того, достаточное увеличенние числа строк по отношению к числу столбцов приводит к снижению времени работы алгоритма.

7 Заключение

В статье рассматривается одна из центральных труднорешаемых задач дискретной математики — дуализация над произведением цепей $P_1, \dots, P_n$, которая, в частности, возникает при конструировании логических процедур классификации по прецедентам. Предполагается, что мощность каждой цепи P_i равна k, $k \geqslant 2$. Поставленная задача имеет в качестве входа k-значные наборы длины k и при $k = 2$ эквивалентна поиску неприводимых покрытий булевой матрицы размера $m \times n$, где m – число входных наборов. Показывается, что в общем случае задача сводится к поиску некоторого подмножества множества неприводимых покрытий булевой матрицы размера $m \times kn$. Приводятся результаты численных экспериментов, базирующиеся на эффективном «в среднем» асимптотически оптимальном перечислении неприводимых покрытий. Предлагаемые построения очевидным образом переносятся и на случай, когда множества P_i имеют различные мощности. Ранее для решения рассматриваемой задачи использовался подход, в основном разрабатываемый за рубежом и представляющий интерес исключительно для теории. Этот подход имеет целью построение инкрементальных алгоритмов с квазиполиномиальными временными оценками «в худшем случае».

Литература

[1] *Дюкова Е.В., Прокофьев П.А.* 2015. Об асимптотически оптимальных алгоритмах дуализации Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 55, №5. С. 895–910, doi: `http://dx.doi.org/10.1134/S0965542515050103`.

[2] *K. Murakami and T. Uno* 2014. Efficient algorithms for dualizing large-scale hypergraphs Discrete Appl. Math. 170, 83–94, doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2014.01.012`.

[3] *E. Boros, K. Elbassioni, V. Gurvich, L. Khachiyan, and K. Makino* 2002. Dual-bounded generating problems: All minimal integer solutions for a monotone system of linear inequalities SIAM Journal on Computing, 31(5): 1624–1643, doi: `http://dx.doi.org/10.1137/S0097539701388768`.

[4] *L. Fredman and L. Khachiyan* 1996. On the complexity of dualization of monotone disjunctive normal forms Journal of Algorithms, 21:618–628, doi: `http://dx.doi.org/10.1006/jagm.1996.0062`.

[5] *Дюкова Е.В.* 1987. О сложности реализации некоторых процедур распознавания Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 27. №1. С.114–127. doi: `http://dx.doi.org/10.1016/0041-5553(87)90121-2`

[6] *Дюкова Е.В., Журавлёв Ю.И.* 2000 . Дискретный анализ признаковых описаний в задачах распознавания большой размерности Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 40. №8. С. 1264-1278, doi: `https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90121-2`.

[7] *Дюкова Е.В., Инякин А.С.* 2008. Асимптотически оптимальное построение тупиковых покрытий целочисленной матрицы Математические вопросы кибернетики. М.: Наука. №17. С. 235-246.

[8] *Дюкова Е. В.* 1977. Об асимптотически оптимальном алгоритме построения тупиковых тестов ДАН СССР. Т. 233. №4. С. 527-530.

[9] *В. Б. Кудрявцев, Андреев А.Е.* 2009. Тестовое распознавание Фундаментальная и прикладная математика, том 15, №4, с. 67—99, doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s10958-010-0057-0`.

[10] *Дюкова Е.В.* 2004. О сложности реализации дискретных (логических) процедур распознавания Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 44. № 3. С. 551–561, doi: `https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90121-2`

Поступила в редакцию 01.01.2017

About product over partially ordered sets*

***E. V. Djukova*[1]*, G. O. Maslyakov*[2]*, P. A. Prokofjev*[1]**

`edjukova@mail.ru, gleb-mas@mail.ru, p_prok@mail.ru`

[1]FRC "Computer Science and Control"of RAS, 40 Vavilova Str., Moscow, Russia

[2]Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow, Russia

Let $P = P_1 \times \ldots \times P_n$, where $P_1, \ldots, P_n$ are finite partially ordered sets. Is considered that element $y = (y_1, \ldots, y_n) \in P$ follows $x = (x_1, \ldots, x_n) \in P$ if y_i follows x_i $i = 1, 2, \ldots, n$. To indicate that $y \in P$ follows $x \in P$ and $y \neq x$ a denotation $y \prec x$ is used. Let $R \subseteq P, R^+ = = R \cup \{x \in P | \exists a \in R, a \prec x\}$. The problem of constructing a set $I(R)$ dual to R consisting of elements $a \in P \setminus R^+$ such that for any $x \in P \setminus R^+, x \neq a$, the relation $a \prec x$ does not hold, is called a dualization over the product of partially ordered sets. This problem is one of the central intractable problems of discrete mathematics.

*The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 16-01-00445).

A practically important case is the case when each P_i is a chain, i.e. any two elements in P_i are comparable. If the power $|P_i|$ each chain P_i is equal to 2, then the problem posed is equivalent to the search for irreducible coverings of a boolean matrix of size $m \times n$, where m is the power of R.

In [?], for a dualization over the product of chains an approach is considered, aims to construct incremental algorithms with quasi-polynomial time estimates for the worst case (for the most complicated version of the problem). This approach, proposed in [?] under the condition that P_i is a chain, $|P_i| = 2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, and is of interest mainly for the theory, because the temporal estimates of the incremental location algorithm depend on the size of the task input and on the size of its output.

In this paper we assume that P_i is a chain, $|P_i| = k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k \geqslant 2$. It is shown that the problem reduces to the search for a subset of the set of irreducible coverings of a Boolean matrix of size $m \times kn$. It is noted that the offered constructions take place in the case when the sets P_i have different powers. The results of numerical experiments based on the effective in the typical case (effective for almost all variants of the problem) asymptotically optimal enumeration of irreducible coverings are given. On the base of asymptotically optimal algorithm of boolean matrix dualization RUNC-M [?] an algorithm of chains dualization RUNC-M+ is developed.

Keywords: *dualization; product of partially ordered sets; chain; covering of boolean matrix; asymptotically optimal algorithm*

DOI: 10.21469/22233792

References

[1] Djukova, E. V., and P. A. Prokofjev. 2015. *Asymptotically optimal dualization algorithms.* Computational Mathematics and Mathematical Physics 55(5): 891–905, doi: `http://dx.doi.org/10.1134/S0965542515050103`

[2] Murakami, K. and T. Uno. 2014. *Efficient algorithms for dualizing large-scale hypergraphs.* Discrete Appl. Math. 170: 83–94, doi: `http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2014.01.012`.

[3] Boros, E., K. Elbassioni, V. Gurvich, L. Khachiyan, and K. Makino. 2002. *Dual-bounded generating problems: All minimal integer solutions for a monotone system of linear inequalities.* SIAM Journal on Computing, 31(5): 1624–1643, doi: `http://dx.doi.org/10.1137/S0097539701388768`.

[4] Fredman, L., and L. Khachiyan. 1996. *On the complexity of dualization of monotone disjunctive normal forms.* Journal of Algorithms 21:618–628, doi: `http://dx.doi.org/10.1006/jagm.1996.0062`.

[5] Djukova, E. 1987. *The complexity of the realization of certain recognition procedures.* Computational Mathematics and Mathematical Physics 27(1):74–83. doi: `http://dx.doi.org/10.1016/0041-5553(87)90121-2`

[6] Djukova, E., and Y. Zhuravlev. 2000. *Discrete analysis of feature descriptions in recognition problems of high dimensionality.* Computational mathematics and mathematical physics 40(8):1214–1227, doi: `https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90121-2`

[7] Djukova, E., and A. Inyakin 2008. *Asimptoticheski optimal'noe postroenie tupikovykh pokrytiy tselochislennoy matritsy [Asymptotically optimal irredundent tests enumeration for integer matrix].* Matematicheskie Voprosy Kibernetiki [Mathematical problems of cybernetics] 17:235–246.

[8] Djukova, E. 1977. *On an asymptotically optimal algorithm for constructing irredundant tests.* Soviet Math. Dokl. 18(2):423–426.

[9] Kudryavtsev, V., and A. Andreev. 2010. *Test recognition*. Journal of Mathematical Sciences 169(4):457–480., doi: `http://dx.doi.org/10.1007/s10958-010-0057-0`

[10] Djukova, E. 2004. *On the implementation complexity of the realization of discrete (logical) recognition procedures*. Computational mathematics and mathematical physics 44(3):532–541, doi: `https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90121-2`

Received January 01, 2017