Kuznetsov M.P., Strijov V.V. Monotonic interpolation for the rank-scaled expert estimations specification // Proceedings of Mathematical Methods of Pattern Recognition. МАКС~Пресс, 2011 : 162-165.

Уточнение ранговых экспертных оценок с использованием монотонной интерполяции*

Кузнецов М. П., Стрижов В. В.
mikhail.kuznecov@phystech.edu
Москва, ВЦ РАН

Описан способ построения интегральных индикаторов качества объектов с использованием экспертных оценок и измеряемых данных. Каждый объект описан набором признаков в линейных шкалах. Используются экспертные оценки качества объектов и важности признаков, которые корректируются в процессе вычисления. Предполагается, что оценки выставлены в ранговых шкалах. Рассматривается задача получения таких интегральных индикаторов, которые не противоречили бы экспертным оценкам. Предложено два подхода к уточнению экспертных оценок. При первом подходе вектор экспертных оценок рассматривается как выпуклый многогранный конус. Для уточнения экспертных оценок минимизируется расстояние между векторами в конусах. При втором подходе используется задача монотонной интерполяции с гиперпараметром. Проведен вычислительный эксперимент на следующих данных: экспертами оценивался фактор экологического воздействия на окружающую среду хорватских электростанций. Проведена процедура уточнения экспертных оценок.

При решении задач управления возникает необходимость дать каждому объекту оценку его качества. Интегральный индикатор — это число, поставленное в соответствие объекту, и рассматриваемое как оценка его качества. Интегральными индикаторами называется вектор оценок, поставленный в соответствие набору объектов.

При построении интегральных индикаторов выбирается критерий качества объектов. Формируется набор объектов, сравнимых в контексте выбранного критерия. Формируется набор показателей, которые эксперты считают необходимыми для описания этого критерия. Составляется матрица «объекты-признаки». Значения показателей приводятся к единой шкале и соответствуют принципу «чем больше, тем лучше»: большему значению показателя (при прочих равных) соответствует большее значение индикатора.

Данная работа посвящена уточнению экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах. Для построения интегральных индикаторов принимается линейная модель: строится линейная комбинация признаков с их весами. Вектор весов признаков и начальный интегральный индикатор выставляются экспертами в ранговой шкале. В общем случае, построенный по вектору весов интегральный индикатор не совпадает с индикатором, заданным экспертами, то есть экспертные данные противоречат друг другу. Данная работа посвящена устранению разногласия в оценках экспертов.

В работе будут рассмотрены два метода. Первый метод развивает идеи, описанные в [1]. Метод заключается в следующем: ранговые экспертные оценки весов показателей задают выпуклый многогранный конус. Матрица «объекты-признаки» задает линейное отображение этого конуса из пространства показателей в пространство интегральных индикаторов. Полученный в результате отображения конус может пересекаться с конусом, заданным ранговыми экспертными оценками интегрального индикатора. В этом случае, экспертные оценки показателей и объектов считаются непротиворечивыми, и отыскивается наиболее устойчивый интегральный индикатор. В противном случае, выполняется процедура рангового уточнения оценок.

Второй метод состоит в решении задачи монотонной интерполяции [2, 3, 4]. Метод заключается в том, что отыскивается вектор с монотонной последовательностью координат, наиболее близкий к заданному экспертами. Введенный в модель гиперпараметр отдает предпочтение экспертным оценкам индикаторов или оценкам весов признаков.

Предложенные алгоритмы используются для оценивания хорватских электростанций [5]. Данные являются матрицей «объекты-признаки» и заданными экспертами векторами оценок интегрального индикатора и весов признаков. Оценивается производительность электростанций.

Экспертные оценки, заданные в ранговых шкалах

Задана матрица описаний объектов $X = \{x_{ij}\}_{i=1}^{m,n}{}_{j=1}$. Вектор $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ — описание i—го объекта. *Интегральный индикатор* — линейная комбинация вида

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} w_j g_j(x_{ij}),$$

где g_j — функция приведения показателей в единую шкалу, например:

$$g_j : x_{ij} \mapsto (-1)^{\zeta_j} \frac{x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}} + \zeta_j. \qquad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №10-07-00422.

Параметр ζ_j назначается равным 1, если оптимальное значение показателя минимально, и 0 иначе. Если знаменатель дроби 1 равен нулю для некоторых значений индекса j , то соответствующий признак исключается из дальнейшего рассмотрения. Будем обозначать теперь за X приведенную таким способом матрицу «объекты-признаки». Таким образом,

$$\mathbf{y} = X\mathbf{w}.$$

Заданы в ранговых шкалах экспертные оценки: $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{w}_0$, допускающие произвольные монотонные преобразования. Пусть на наборах экспертных оценок введено отношение порядка такое, что

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_m \geqslant 0; \; w_1 \geqslant w_2 \geqslant \cdots \geqslant w_n \geqslant 0.$$

Множество всех таких векторов задается системой линейных неравенств

$$J\mathbf{y} \geqslant 0,$$

где

$$\underset{m\times m}{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если же порядок $y_{i_1} \geqslant y_{i_2} \geqslant y_{i_m} \geqslant 0$ произвольный, то матрица системы будет получается из J перестановкой соответствующих столбцов.

Таким образом, заданным $\mathbf{y}_0$ и $\mathbf{w}_0$ можно поставить в соответствие матрицы J_m и J_n размеров соответственно $m \times m$ и $n \times n$.

Решение задачи согласования экспертных оценок с использованием конусов

В этом параграфе опишем метод согласования экспертных оценок, предложенный в [1]. Дадим некоторые определения.

Определение 1. *Множество точек $\mathcal{Y}$ в $\mathbb{R}^m$ называется конусом, если для любой точки $y \in \mathcal{Y}$ точка λy также принадлежит $\mathcal{Y}$.*

Определение 2. *Выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат — это область решений системы однородных неравенств:*

$$\begin{cases} a_{11}w_1 & + & a_{12}w_2 & + & \ldots & + & a_{1n}w_n & \geqslant & 0; \\ a_{21}w_1 & + & a_{22}w_2 & + & \ldots & + & a_{2n}w_n & \geqslant & 0; \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\ a_{m1}w_1 & + & a_{m2}w_2 & + & \ldots & + & a_{mn}w_n & \geqslant & 0. \end{cases}$$

Эта система линейных неравенств задает в соответствующем пространстве выпуклый многогранный конус. Соответствуя данному определению, определим $\mathcal{Y}$ — конус, задаваемый матрицей J_m в пространстве интегральных индикаторов; $\mathcal{W}$ — конус, задаваемый матрицей J_n в пространстве весов признаков. Эти конусы характеризуются тем, что векторы внутри каждого из них имеют одинаковый ранговый порядок.
Поскольку A — линейное преобразование, оно переводит конус $\mathcal{W}$ в конус $A\mathcal{W}$, который лежит в пространстве интегральных индикаторов.

Задача 1. Требуется найти в конусах $\mathcal{W}$ и $\mathcal{Y}$ векторы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{y}$, такие, что:

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_1) = \min_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y},\ \mathbf{w}\in\mathcal{W}} \|\mathbf{y} - A\mathbf{w}\|;$$
$$\text{при } \|A\mathbf{w}\| = 1, \|\mathbf{y}\| = 1,$$

где $\|.\|$ — евклидова метрика в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Таким образом, отыскивается вектор весов $\mathbf{w}_1$, элементы которого имеют такой же ранговый порядок, что и $\mathbf{w}_0$. При этом приведенный в ранговую шкалу индикатор $A\mathbf{w}_1$ является ближайшим к $\mathbf{y}_0$.

В случае непустого пересечения конусов $\mathcal{Y}$ и $A\mathcal{W}$ решение задачи (1) дает вектор $\mathbf{y}$, который лежит в пересечении этих конусов. Если пересечение — пустое, предлагается найти ближайшие друг к другу лучи на ребрах или гранях конусов.

Отыскиваемая пара $(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_1)$ должна выполнять следующие условия:

$$\begin{array}{lll} \text{Минимизировать} & \|\mathbf{y} - A\mathbf{w}\| & \\ \text{при условиях} & \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1, & (A\mathbf{w})^T A\mathbf{w} = 1; \\ & J_n\mathbf{w} \geqslant \mathbf{0}, & J_m\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}. \end{array}$$

Постановка задачи согласования экспертных оценок с использованием монотонной интерполяции

В данном параграфе рассмотрим новый метод согласования экспертных оценок. Пусть $\mathbf{y}_0$ — заданное экспертами начальное приближение вектора $\mathbf{y}$. Вектор, наиболее близкий в пространстве весов признаков к $\mathbf{y}_0$, в смысле наименьших квадратов:

$$\widetilde{\mathbf{w}} = X^+\mathbf{y}_0, \text{ где}$$
$$X^+ = (X^T X)^{-1} X^T.$$

Задача 2. Требуется найти такую монотонную последовательность $w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_n$, что она лучше всего приближает вектор $\widetilde{\mathbf{w}}$ в смысле среднего квадрата ошибки:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{w}} = \arg\min\limits_{w\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\widetilde{w}_j - w_j)^2; \\ w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_n. \end{cases}$$

Такую задачу можно решить, например, методом, описанным в [2]. Однако, чтобы получить согласованные экспертные оценки, введем в модель гиперпараметр. С его помощью мы сможем варьировать нашу «степень доверия» от экспертных оценок весов признаков (то есть, монотонной последовательности $w_1 \leqslant \dots \leqslant w_n$) к экспертным оценкам интегральных индикаторов (вектору $\widehat{\mathbf{w}}$).

Задача 3. Требуется найти такой вектор $\widehat{\mathbf{w}}$, что:

$$\widehat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{w}_j - w_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n-1}(w_j - w_{j+1})_+ \right). \quad (2)$$

Решение задачи монотонной интерполяции с гиперпараметром

Для решения этой задачи воспользуемся идеями, описанными в [4].

Утверждение 1. *Пусть, для некоторого λ_0, совпадают две соседние координаты оценки: $\widehat{w}_j(\lambda_0) = \widehat{w}_{j+1}(\lambda_0)$. Тогда $\widehat{w}_j(\lambda) = \widehat{w}_{j+1}(\lambda)$ для всех $\lambda > \lambda_0$.*

Пусть при некотором λ совпадают некоторые соседние координаты вектора $\mathbf{w}$, и всего таких множеств совпадающих координат — K_λ. Обозначим за $A_1, \dots, A_{K_\lambda}$ сами эти множества. Заметим, что $A_1 \cup \dots \cup A_{K_\lambda} = \{1, \dots, n\}$. Тогда функция потерь для задачи (2) перепишется в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K_\lambda}\sum_{l\in A_k}(\widetilde{w}_l - w_{A_k})^2 + \lambda\sum_{k=1}^{K_\lambda}(w_{A_k} - w_{A_{k+1}})_+.$$

Продифференцируем ее по всем w_{A_k}:

$$-\sum_{l\in A_k}\widetilde{w}_l + |A_k|\widehat{w}_{A_k}(\lambda) + \lambda(s_k - s_{k-1}) = 0$$

$$\text{для } k = 1, \dots, K_\lambda,$$

где $s_k = 1$ при $\widehat{w}_{A_k}(\lambda) - \widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) > 0$, и $s_k = 0$ иначе.

Пусть все $A_1, \dots, A_{K_\lambda}$ не изменяются с увеличением λ. Тогда:

$$\frac{d\widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{s_{k-1} - s_k}{|A_k|}.$$

Когда λ увеличивается, множества A_k меняются. Однако, согласно утв. 1, они могут только объединяться, то есть, величины компонент $\widehat{w}_{A_k}(\lambda)$ внутри каждого множества A_k остаются равными. Можно посчитать величину следующего λ, при котором будут объединяться множества A_k, A_{k+1}. Обозначим это λ как $t_{k,k+1}$.

Алгоритм 1. Алгоритм решения задачи монотонной интерполяции.

Вход: $\lambda = 0,\ K_\lambda = n,\ A_k = \{k\},\ \widehat{w}_{A_k}(\lambda) = \widetilde{w}_k$.

повторять
- $D_k := \frac{s_{k-1} - s_k}{|A_k|}$;
- $t_{k,k+1} := \frac{\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda$;
- $\widehat{\lambda} := \min\limits_{k:t_{k,k+1}>\lambda} t_{k,k+1}$;
- $\widehat{w}_{A_k}(\lambda) := \widehat{w}_{A_k}(\lambda) + D_k(\widehat{\lambda} - \lambda)$;
- объединить $A_{k'}$ и $A_{k'+1}$, см. (3);
- $\lambda := \widehat{\lambda}$;

пока существует k: $t_{k,k+1} \geqslant \lambda$.

Утверждение 2. *Множества A_k и A_{k+1} будут объединяться при*

$$t_{k,k+1} = \frac{\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda,$$

для всех $k = 1, .., K_\lambda - 1$, где

$$D_k = \frac{d\widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda}.$$

Доказательство. Поскольку производные

$$\frac{d\widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda}$$

не являются функциями λ, можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \widehat{w}_{A_k}(\lambda) = \lambda D_k + C_k; \\ \widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda,) = \lambda D_{k+1} + C_{k+1}. \end{cases}$$

В точке $t_{k,k+1}$ происходит объединение множеств A_k и A_{k+1}, то есть:

$$\widehat{w}_{A_k}(t_{k,k+1}) = \\ = \widehat{w}_{A_{k+1}}(t_{k,k+1}) \ \Rightarrow\ t_{k,k+1} = \frac{C_{k+1} - C_k}{D_k - D_{k+1}} = \\ = \frac{(\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \lambda D_{k+1}) - (\widehat{w}_{A_k}(\lambda) - \lambda D_k)}{D_k - D_{k+1}} = \\ = \frac{\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda.$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, на каждой итерации нужно вычислять величину

$$\widehat{\lambda} = \min_{k:t_{k,k+1}>\lambda} t_{k,k+1}$$

и объединять множества $A_{k'}$ и $A_{k'+1}$, где

$$k' = \arg\min_{k:t_{k,k+1}>\lambda} t_{k,k+1}. \ (3)$$

Результат работы алгоритма монотонной интерполяции

Проиллюстрируем работу алгоритма решения задачи монотонной интерполяции на модельной выборке, порожденной с помощью функции $y_i = x_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 20)$. Ломаная линия на рис. 1 — восстановленная зависимость, для различных значений регуляризатора λ.

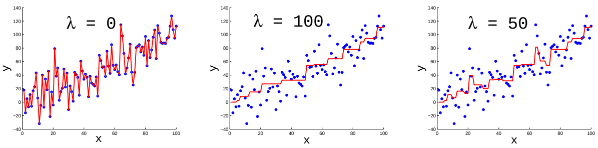

Рис. 1. Монотонная интерполяция.

Видно, что при $\lambda = 100$ и более функция, восстанавливающая зависимость, монотонная.

При $\lambda = 0$, наоборот, никакой монотонной коррекции нет.

Вычислительный эксперимент

Был проведен вычислительный эксперимент уточнения экспертных оценок экологического воздействия на окружающую среду хорватских электростанций. Для этого были собраны следующие данные: матрица «объекты-признаки», где объекты — это 7 электростанций, описываемых 11 признаками, экспертные оценки весов показателей и интегральных индикаторов электростанций. Приведем таблицу с данными (в ней показано только 6 первых признаков):

N	Power Plant	Available net capacity (MW)	Electricity (GWh)	Heat (TJ)	SO_2 (t)	NO_x (t)	Particles (t)
1	Plomin 1 TPP	98	452	0	1950	1378	140
2	Plomin 2 TPP	192	1576	0	581	1434	60
3	Rijeka TPP	303	825	0	6392	1240	171
4	Sisak TPP	396	741	0	3592	1049	255
5	TE-TO Zagreb CHP	337	1374	481	2829	705	25
6	EL-TO Zagreb CHP	90	333	332	1259	900	19
7	TE-TO Osijek CHP	42	114	115	1062	320	35
	Optimal value	max	max	max	min	min	min

Таблица 1. Электростанции

На рис. 2 показаны графики интегральных индикаторов, вычисленных различными алгоритмами:

а) начальный интегральный индикатор $\mathbf{q}_0$,

б) интегральный индикатор, построенный по $\mathbf{w}_0$,

в) алгоритм минимизации расстояния между векторами в конусах,

г) алгоритм максимизации корреляции между векторами в конусах,

д) алгоритм монотонной интерполяции со значением гиперпараметра $\lambda = 1$,

е) алгоритм монотонной интерполяции со значением гиперпараметра $\lambda = 0.5$.

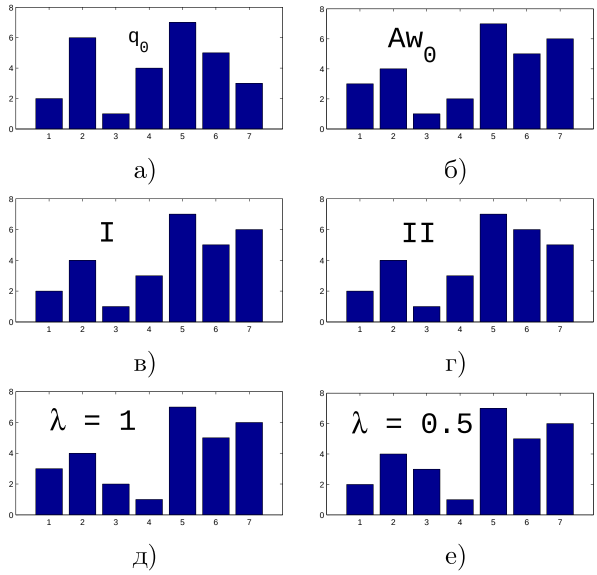

Рис. 2. Интегральные индикаторы электростанций.

Заключение

В работе рассматривалась задача получения согласованных оценок качества объектов и важности показателей. В результате выполнения работы обобщены ранее полученные результаты по согласованию экспертных оценок с использованием конусов. Предложено использовать алгоритм монотонной интерполяции для уточнения экспертных оценок. Исследованы свойства этого алгоритма при различном значении гиперпараметра, введенного в модель. Проведен вычислительный эксперимент уточнения экспертных оценок качества хорватских электростанций, составлен рейтинг электростанций, основанный на оценках экспертов и измеряемых данных.

Литература

[1] *V. Strijov, G. Granić et al.* Integral indicator of ecological impact of the Croatian thermal power plants // Energy. — 2011. — V. 4, N. 30.

[2] *J. de Leeuw, K. Hornik, P. Mair* Isotone Optimization in R: Pool-Adjacent-Violators Algorithm (PAVA) and Active Set Methods // Jounal of Statistic Software. — 2009. — V. 29.

[3] *R. E. Barlow, H. D. Brunk* The Isotonic Regression Problem and Its Dual // Journal of American Statistical Association. — 1972. — V. 67. — Pp. 140–147.

[4] *R. J. Tibshirani, H. Hoefling, R. Tibshirani* Nearly-isotonic Regression // Technometrics. — 2011. — V. 53.

[5] *R. Kos, Z. Krisic, T. Tarnik* Hrvatska elektoprivreda and the environment 2005–2006 // Zagreb, Hrvatska Elektroprivreda, 2008.