Kuznetsov M.P., Strijov V.V. Integral indicator construction using rank-scaled design matrix // Intellectual Information Processing. Conference proceedings, 2012 : 130-132.

Построение интегрального индикатора с использованием ранговой матрицы описаний*

Кузнецов М. П., Стрижов В. В.
mikhail.kuznecov@phystech.edu
Москва, ВЦ РАН

Описан способ построения интегральных индикаторов качества объектов с использованием экспертных оценок и измеряемых данных. Каждый объект описан набором признаков в ранговых шкалах. Используется экспертная оценка качества объектов, которая корректируется в процессе вычисления. Эта оценка выставлена в линейной шкале. Рассматривается задача получения таких интегральных индикаторов, которые не противоречили бы экспертной оценке. Для этого по матрице описаний строится множество значений интегрального индикатора. Интегральный индикатор определяется проекцией экспертной оценки на это множество.

При решении задач управления возникает необходимость дать каждому объекту оценку его качества. Интегральный индикатор — это число, поставленное в соответствие объекту, и рассматриваемое как оценка его качества. Интегральными индикаторами называется вектор оценок, поставленный в соответствие набору объектов.

При построении интегральных индикаторов выбирается критерий качества объектов. Формируется набор объектов, сравнимых в контексте выбранного критерия. Формируется набор показателей, которые эксперты считают необходимыми для описания этого критерия. Составляется матрица описаний объектов.

Ранее в работах [1, 2] были описаны процедуры построения интегральных индикаторов с использованием описаний объектов в линейных шкалах. При этом интегральный индикатор являлся уточнением оценки, заданной экспертом в линейной или ранговой шкале.

В данной работе рассматривается ранговое описание объектов, то есть каждый столбец матрицы описаний определяет линейный порядок, установленный на компонентах этого столбца. При этом каждый столбец задает множество в пространстве объектов, а не точку, как в случае линейных шкал. В случае ранговых шкал, каждое из этих множеств является конусом.

Данная работа посвящена уточнению экспертной оценки качества объектов. Для построения интегральных индикаторов строится множество значений интегрального индикатора, являющееся суммой Минковского конусов, задаваемых столбцами матрицы описаний в пространстве объектов. Решением задачи является проекция экспертной оценки качества объектов на это множество.

В работе рассматривается метод построения суммы Минковского выпуклых многогранников, заданных системами линейных неравенств [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №11-07-13160.

Матрица описаний с ранговыми признаками

Даны матрица описаний объектов $X_{n\cdot m}$ и интегральный индикатор $\mathbf{y}_0$, выставленный экспертами. Требуется описать процедуру построения интегрального индикатора $\mathbf{y}_1$, полученного путем уточнения экспертной оценки $\mathbf{y}_0$ с использованием матрицы описаний X.

В нашем случае, столбцы матрицы X являются ранговыми признаками, то есть каждый столбец матрицы X определяет множество:

$$\mathbf{X}_j : \chi_j = \{\mathbf{x}_j \,|\, A_j\mathbf{x}_j \leqslant 0\}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

В общем случае, множество χ_j является многогранником, определяемым матрицей A_j. В нашем случае, «ранговость» столбцов матрицы X означает, что на компонентах столбцов введен частичный или полный линейный порядок, и множество χ_j является конусом в пространстве объектов. Например, для порядка $x_j^1 \geqslant \cdots \geqslant x_j^n \geqslant 0$ матрица

$$A_j = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix},$$

определяет выпуклый многогранный конус χ_j.

Принимается линейная модель построения интегрального индикатора. В нашем случае, это означает следующее: $\mathbf{y}$ является интегральным индикатором, не противоречащим матрице описаний X в том и только в том случае, когда он представляется в виде суммы:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \in \chi_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \chi_m.$$

Для дальнейшего рассмотрения напомним понятие суммы Минковского двух множеств. Суммой Минковского двух подмножеств L_1 и L_2 линейного пространства L называется множество L', состоящее из всевозможных сумм векторов из L_1 и L_2. Из этих двух определений логично вытекает определение области значений линейной модели. Областью значений для линейной модели назовем сумму Минковского:

$$\chi = \chi_1 + \cdots + \chi_m.$$

Заметим, что введенное таким образом определение линейной модели с ранговым описанием объектов обобщает линейную модель в ее стандартном понимании:

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{X}_j w_j,$$

поскольку каждое слагаемое $\mathbf{X}_j w_j$ для всех w_j является подмножеством конуса χ_j. Следовательно, в случае рангового описания исчезают веса признаков.

Таким образом, для построения интегрального индикатора требуется построить сумму Минковского выпуклых многогранников. Для ее построения воспользуемся методом точного построения суммы Минковского двух многогранников, заданных системами линейных неравенств [3].

Итак, пусть дано два выпуклых многогранника, задающихся системами неравенств:

$$\chi_1 = \{\mathbf{x}_1 \,|\, A_1\mathbf{x}_1 \leqslant \mathbf{b}_1\}, \quad \chi_2 = \{\mathbf{x}_2 \,|\, A_2\mathbf{x}_2 \leqslant \mathbf{b}_2\}.$$

Их суммой Минковского будет являться вектор $\mathbf{x}$, являющийся решением системы:

$$\begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = 0; \\ A_1\mathbf{x}_1 \leqslant \mathbf{b}_1; \\ A_2\mathbf{x}_2 \leqslant \mathbf{b}_2, \end{cases}$$

которая заменой переменной $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_2$ преобразуется в систему:

$$\begin{cases} A_1\mathbf{x} - A_2\mathbf{x}_2 \leqslant \mathbf{b}_1; \\ A_2\mathbf{x}_2 \leqslant \mathbf{b}_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Справедливо следующее утверждение: вектор $\mathbf{x} \in \chi$ тогда и только тогда, когда найдется вектор $\mathbf{x}_2$, удовлетворяющий системе (1).

Таким образом, задача поиска вектора $\mathbf{x}$ сводится к решению системы линейных неравенств:

$$C\mathbf{x}_2 \leqslant \mathbf{d}, C = \begin{pmatrix} -A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 - A_1\mathbf{x} \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}.$$

Для решения этой системы используем вариант леммы Минковского–Фаркаша [4], который формулируется следующим образом.

Пусть A и b — матрица и вектор. Разрешимость системы линейных неравенств $Ax \leqslant b$ эквивалентна тому, что $yb \geqslant 0$ для любого вектора-строки $y \geqslant 0$ со свойством $yA = 0$. В нашем случае, эта лемма записывается так:

$$\exists \mathbf{x}_2 \colon C\mathbf{x}_2 \leqslant \mathbf{d} \Leftrightarrow \forall \mathbf{z} \colon C^T\mathbf{z} = 0, \mathbf{z} \geqslant 0 \to (\mathbf{d}, \mathbf{z}) \geqslant 0.$$

Пусть V является фундаментальной системой решений для этого случая, причем $V = \binom{V_1}{V_2}$, где V_i — ФСР, соответствующая матрице A_i. Тогда условие $(\mathbf{d}, \mathbf{z}) \geqslant 0$ перепишется в виде:

$$V_1^T(\mathbf{b}_1 - A_1\mathbf{x}) + V_2^T\mathbf{b}_2 \geqslant 0.$$

Таким образом, принимая $A = V_1^T A_1$, $\mathbf{b} = V_1^T\mathbf{b}_1 + V_2^T\mathbf{b}_2$, мы получим параметры $A, \mathbf{b}$ системы неравенств, описывающей сумму Минковского $\chi_1 + \chi_2$.

Заметим, что отдельной трудностью является нахождение фундаментальной системы решений V, каждый столбец которой должен быть $\geqslant 0$. Алгоритмы отыскания такой системы описан в [5].

Проекцией точки x на множество D называется вектор $P(x) \in D$, удовлетворяющий условию:

$$P_D(x) = \arg\min_{y \in D} \|x - y\|.$$

Построив область значения модели χ, определим уточненный интегральный индикатор $\mathbf{y}_1$ как проекцию экспертной оценки $\mathbf{y}_0$ на χ:

$$\mathbf{y}_1 = P_\chi(\mathbf{y}_0).$$

Отметим, что эта проекция является единственной в силу выпуклости множества χ.

Рассмотрим небольшой пример. Пусть дана матрица:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда для нее матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и неравенство для суммы: $\chi = \{\mathbf{x} \,|\, A\mathbf{x} \leqslant 0\}$.

Таким образом, область значений линейной модели записывается в виде:

$$\chi = \begin{cases} \mathbf{x}_1 \geqslant 0; \\ \mathbf{x}_2 \geqslant 0; \\ \mathbf{x}_3 \geqslant 0; \\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 \geqslant \mathbf{x}_2. \end{cases}$$

Если, например, экспертная оценка $\mathbf{y}_0 = (1, 5, 2)$, то ее проекция на область значения χ: $\mathbf{y}_1 = \left(\frac{5}{3}, \frac{16}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

Связь с методом наименьших квадратов. Рассмотрим задачу линейной регрессии:

$$\mathbf{y} = X\mathbf{w} + \varepsilon, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m.$$

Решением в смысле наименьших квадратов $\hat{\mathbf{y}}$ будет являться проекция вектора $\mathbf{y}$ на сумму Минковского множества χ, где

$$\chi = \chi_1 + \cdots + \chi_m, \quad \chi_i = \{w_i \mathbf{x}_i, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m\},$$

т. е., множество χ_i является лучом в пространстве объектов. В этом случае, сумма Минковского набора лучей является гиперплоскостью размерности m. В более общем случае, когда признаки представляются не точками, а множествами (ранговые/интервальные шкалы) в пространстве объектов, множество χ является не просто гиперплоскостью, а выпуклым множеством.

Выводы

Описан способ построения интегральных индикаторов качества объектов, описанных набором ранговых признаков. Согласно этому способу, по матрице описаний строится множество значений интегрального индикатора. Интегральный индикатор определяется проекцией экспертной оценки на это множество. Дальнейшая работа будет направлена на рассмотрение номинальных и интервальных шкал признаковых описаний.

Литература

[1] *Strijov V., Granić G. et al.* Integral indicator of ecological impact of the Croatian thermal power plants // Energy doi:10.1016/j.energy.2011.04.30. — 2011.

[2] *Стрижов В. В.* Уточнение экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах, с помощью измеряемых данных // Заводская Лаборатория. — 2011.

[3] *Уханов М. В.* Алгоритм построения суммы многогранников // Вестник ЮУрГУ. — 2001. — № 7. — С. 39–44.

[4] *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1991. — Т. 1. — С. 360.

[5] *Черникова Н. Б.* Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1964. — Т. 4, № 4. — С. 733–738.