

Согласование агрегированных и детализированных прогнозов при решении задач непараметрического прогнозирования*

Стенина М. М.¹, Стрижов В. В.²

Во многих прикладных областях часто возникают задачи, связанные с прогнозированием большого числа временных рядов, образующих иерархическую структуру. К прогнозам таких рядов как правило предъявляется требование согласованности прогнозов по уровням иерархии. В статье предлагается алгоритм согласования прогнозов иерархических временных рядов, основанный на решении задачи оптимизации с ограничениями. Предлагаемый алгоритм позволяет проводить согласование прогнозов в случае неплоской иерархической структуры, а также учитывать физические ограничения на прогнозируемые величины, такие как неотрицательность или максимальное значение. Работа алгоритма демонстрируется на данных посуточной загруженности железнодорожных узлов в Омской области, качество прогнозов сравнивается с качеством прогнозов алгоритма оптимального согласования. Также демонстрируется работа предлагаемого алгоритма при неплоской иерархической структуре временных рядов.

Ключевые слова: *иерархические временные ряды, непараметрическое прогнозирование, эмпирическое распределение, согласование прогнозов.*

Reconciliation of aggregated and disaggregated time series forecasts in nonparametric forecasting problems*

Stenina M. M.¹, Strijov V. V.²

In many applications there are problems of forecasting a lot of time series with hierarchical structure. It is needed to reconcile forecasts across the hierarchy. In this paper new algorithm of reconciliation hierarchical time series forecasts is proposed. This algorithm is based on solving of optimization problem with constraints. Proposed algorithm allows to reconcile forecasts with nonplanar hierarchical structure and take into account physical constraints of forecasted values such as non-negativeness or maximal value. The algorithm performance is illustrated by railroad stations occupancy data in Omsk region. Forecasts quality is compared with forecasts quality optimal algorithm of reconciliation. Also the algorithm performance is demonstrated for nonplanar hierarchical structure of time series.

Keywords: *hierarchical time series, nonparametric forecasting, empirical distribution, forecasts reconciliation.*

Введение

Во многих прикладных областях часто возникают задачи, связанные с прогнозированием большого числа временных рядов, образующих иерархическую структуру, основанную, например, на разбиении на географические районы или по группам товаров или грузов.

1 — Московский физико-технический институт (Moscow Institute of Physics and Technology), mmedvednikova@gmail.com

2 — ВЦ РАН им. Дородницына (Dorodnicyn Computing Centre of RAS), strijov@ccas.com

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-07-13139.

Основное требование, предъявляемое к прогнозам иерархических временных рядов, — согласованность сумм прогнозируемых величин по уровням иерархии.

Существует несколько основных подходов к задаче согласования прогнозов иерархических временных рядов. Подходы top-down и bottom-up являются самыми распространенными. Подход top-down предполагает получение прогноза на верхнем уровне иерархии (агрегированный временной ряд), а затем деагрегирование этого прогноза на следующий (более низкий) уровень иерархии на основании долей, наблюдаемых в истории. Подход bottom-up использует прогнозы временных рядов нижнего уровня иерархии (неагрегированных), из которых получает прогнозы рядов из верхних уровней путем агрегирования. Также встречаются подходы, комбинирующие top-down и bottom-up, их называют middle-out.

Нет единой точки зрения на то, какой из подходов позволяет получать более точные прогнозы. Наиболее ранние исследования проведены в работе [1], где авторы обсуждают, что неагрегированные данные содержат много ошибок, и поэтому top-down прогнозирование дает более точные прогнозы. К таким же выводам приходят авторы работ [2, 3]. В [4] также обсуждается, что агрегированные прогнозы более точны. С другой стороны, в [5, 6] обсуждается, что основные потери информации происходят при агрегировании, и поэтому bottom-up подход предпочтительнее. В [7] сравниваются оба подхода к согласованию прогнозов и утверждается, что bottom-up предпочтительнее при выполнении некоторых условий на структуру иерархии и горизонт прогноза. В [8] исследуются смещение и устойчивость прогнозов, получаемых с помощью обоих подходов, и заключается, что bottom-up надежнее, за исключением случаев с пропусками значений и выбросами на нижних уровнях иерархии.

В следующих работах проводились теоретические исследования подходов bottom-up и top-down, которые не дали выводов о том, что один из подходов согласования прогнозов более предпочтителен, чем другой. В [9, 10] приводятся теоретические аргументы в пользу того, что точность прогнозов зависит от ковариационной структуры рядов-компонентов иерархической структуры. В работе [11] обсуждаются несколько моделей временных рядов и демонстрируется, что нет однозначного превосходства одного подхода над другим. В [12] заключается, что необходимо комбинировать оба подхода. В [13] обобщаются направления прогнозирования иерархических временных рядов, но не предлагается новых подходов.

Авторы статьи [14] обобщают существующие подходы к согласованию иерархических прогнозов и предлагают оптимальное согласование с использованием регрессии. В этой работе утверждается, что предлагаемый подход охватывает все возможные способы согласования прогнозов для иерархических временных рядов. Однако в статье рассматриваются только способы согласования, включающие всевозможные суммирования прогнозов рядов нижнего уровня иерархии для получения прогнозов верхних уровней либо разбиения прогнозов верхнего уровня иерархии для получения прогнозов нижнего уровня.

В настоящей работе предлагается принципиально иной подход к задаче согласования прогнозов иерархических временных рядов, позволяющий проводить согласование не только для иерархий с плоской структурой, но и для иерархий, в которых разбиение производится более чем по одной размерности (например, разбиение по товарам и территориальное разбиение по местоположению магазинов при прогнозировании спроса или разбиение по типам грузов и железнодорожным веткам при прогнозировании объемов грузоперевозок). Кроме того, при использовании предлагаемого подхода есть возможность учитывать физические ограничения на прогнозируемые величины, такие как, например, их неотрицательность. Корректировка прогнозов производится путем оптимизации квадратичного

функционала с ограничениями типа равенства и неравенства. Ограничение-равенство соответствует требованию равенства прогноза верхнего уровня иерархии сумме прогнозов нижнего уровня иерархии, а ограничения-неравенства связаны с физической природой прогнозируемых величин (например, количество проданного товара или отправленных вагонов не может быть отрицательным). При многоуровневой иерархической структуре согласование проводится сверху вниз, то есть сперва согласуются первый и второй уровень, затем второй и третий, и так далее.

Для оценки качества работы предлагаемой процедуры согласования проводится эксперимент по прогнозированию объемов железнодорожных грузоперевозок 38 типов грузов по 99 веткам. Для варианта плоской иерархической структуры проводится сравнение качества прогноза с алгоритмом оптимального согласования [14], который, как показано в [14], превосходит по качеству прогнозов подходы top-down и bottom-up. Также оценивается качество прогноза при согласовании для иерархической структуры с двумя размерностями (ветки и типы грузов).

В качестве алгоритма прогнозирования временных рядов выбран алгоритм непараметрического прогнозирования Hist, описанный в [15].

В разделе «Задача согласования прогнозов» описывается предлагаемый алгоритм согласования, затем в разделе «Алгоритм непараметрического прогнозирования Hist» описывается используемый алгоритм прогнозирования, раздел «Вычислительный эксперимент» посвящен оценке качества работы предлагаемого алгоритма и его сравнению с алгоритмом оптимального согласования [14].

Задача согласования прогнозов

Согласование прогнозов при плоской иерархической структуре. Рассмотрим двухуровневую плоскую иерархическую структуру, в которой на верхнем уровне находится один временной ряд

$$\mathbf{X} = \{X_t\}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Пусть на нижнем уровне находится n временных рядов

$$\mathbf{x}_i = \{x_{it}\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n.$$

Связь между рядом верхнего уровня и рядами нижнего уровня задается соотношением

$$X_t = \sum_{i=1}^n x_{it}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Графически эта структура изображена на рис. 1.

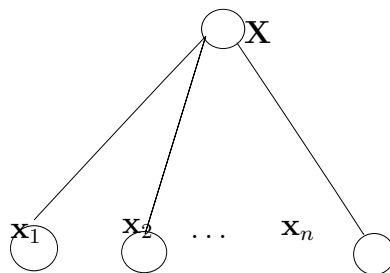


Рис. 1: Двухуровневая плоская иерархическая структура

Пусть известны прогнозы для временных рядов нижнего уровня иерархии

$$\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$$

и для каждого прогноза сделана оценка доверительного интервала

$$[\hat{x}_1 - d_1; \hat{x}_1 + d_1], \dots, [\hat{x}_n - d_n; \hat{x}_n + d_n].$$

Пусть прогноз для временного ряда верхнего уровня иерархии равен \hat{X} . Предлагается, не корректируя прогноз верхнего уровня \hat{X} , построить скорректированные прогнозы y_i , которые являются решением оптимизационной задачи с ограничениями

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i^2} (y_i - \hat{x}_i)^2 \longrightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \hat{X}; \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Скорректированные прогнозы y_i должны быть максимально близки к исходным прогнозам \hat{x}_i в смысле квадратичного отклонения Q и при суммировании давать прогноз \hat{X} , то есть быть с ним согласованными. Ограничения-неравенства в этой оптимизационной задаче соответствуют физическим ограничениям на прогнозируемую величину (в данном случае рассматриваются только неотрицательные величины).

При отсутствии активных ограничений-неравенств задача (1) имеет аналитическое решение

$$y_i = \hat{x}_i + \frac{d_i^2}{\sum_{i=1}^n d_i^2} \left(\hat{X} - \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \right),$$

которое имеет явный физический смысл: рассогласованность прогнозов $\hat{X} - \sum_{i=1}^n \hat{x}_i$ распределяется по компонентам пропорционально ширине их доверительных интервалов. При активных ограничениях-неравенствах необходимо решать задачу (1) с помощью итерационного процесса. Этот процесс сходится достаточно быстро в силу выпуклости функционала Q и, следовательно, наличия у него единственного глобального минимума.

При наличии в иерархической структуре количества уровней, большего, чем два, предлагается проводить описанную процедуру согласования по уровням от наименее детализированных к более детализированным (сверху вниз). При этом согласование в каждом узле дерева, соответствующего иерархической структуре, рассматривается как отдельная оптимизационная задача (1).

Согласование прогнозов при иерархической структуре с разбиением более чем по одному измерению. Рассмотрим иерархическую структуру, в которой разбиение проводится по двум размерностям. Например, для объемов железнодорожных перевозок такие разбиения можно проводить по веткам и типам грузов. В первом уровне этой структуры находится временной ряд \mathbf{S} (см. рис. 2), соответствующий суммарному отправлению всех типов грузов со всех веток. Обозначим количество веток m , а количество типов грузов n . Если разбиение общего количества вагонов производится по веткам, то каждый ряд второго уровня \mathbf{X}_j , $j = 1, \dots, m$, соответствует отправлению с ветки j всех типов грузов. Если разбиение проводится по грузам, то каждый ряд второго уровня \mathbf{Z}_i , $i = 1, \dots, n$, соответствует отправлению вагонов с типом груза i со всех веток. На третьем

уровне иерархии разбиение проводится одновременно по веткам и типам грузов, поэтому у временных рядов x_{ij} двойная индексация. Каждый ряд x_{ij} соответствует отправлению груза i с ветки j . На рис. 2 эти ряды разнесены для различных разбиений на втором уровне для наглядности, но в действительности это один и тот же набор временных рядов.

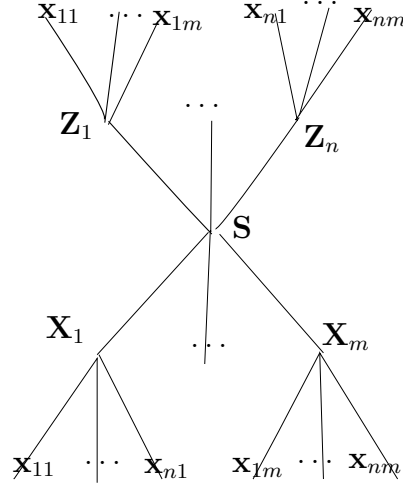


Рис. 2: Иерархическая структура с разбиением по двум измерениям

Соотношения, связывающие значения временных рядов на разных уровнях иерархии, задаются следующим образом

$$Z_{it} = \sum_{j=1}^m x_{ijt}, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$X_{jt} = \sum_{i=1}^n x_{ijt}, \quad t = 1, \dots, T, \quad j = 1, \dots, m;$$

$$S_t = \sum_{i=1}^n Z_{it} = \sum_{j=1}^m X_{jt}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Пусть известны прогнозы

$$\hat{S}, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m, \hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_n, \hat{x}_{11}, \hat{x}_{12}, \dots, \hat{x}_{nm}$$

и доверительные интервалы

$$[\hat{X}_1 - D_1; \hat{X}_1 + D_1], \dots, [\hat{X}_m - D_m; \hat{X}_m + D_m],$$

$$[\hat{Z}_1 - E_1; \hat{Z}_1 + E_1], \dots, [\hat{Z}_n - E_n; \hat{Z}_n + E_n],$$

$$[\hat{x}_{11} - d_{11}; \hat{x}_{11} + d_{11}], [\hat{x}_{12} - d_{12}; \hat{x}_{12} + d_{12}], \dots, [\hat{x}_{nm} - d_{nm}; \hat{x}_{nm} + d_{nm}].$$

Требуется построить скорректированные прогнозы y_{ij} , которые являются решением оптимизационной задачи с ограничениями:

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{d_{ij}^2} (y_{ij} - \hat{x}_{ij})^2 \longrightarrow \min \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_{ij} &= \hat{X}_j, \quad j = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^m y_{ij} &= \hat{Z}_i, \quad i = 1, \dots, n; \\ y_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Необходимым условием существования решения задачи (2) является согласованность прогнозов второго уровня \hat{X}_j, \hat{Z}_i :

$$\sum_{i=1}^n \hat{Z}_i = \sum_{j=1}^m \hat{X}_j. \quad (3)$$

Поскольку это условие для прогнозов, полученных независимо для разных временных рядов не будет выполняться почти никогда, необходимо найти скорректированные прогнозы Y_j, W_i , то есть решить оптимизационную задачу с ограничениями

$$Q = \sum_{j=1}^m \frac{1}{D_j^2} (Y_j - \hat{X}_j)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i^2} (W_i - \hat{Z}_i)^2 \rightarrow \min \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m Y_j &= \sum_{i=1}^n W_i, \\ Y_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ W_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Затем найденные скорректированные прогнозы Y_j, W_i необходимо подставить в (2) вместо прогнозов \hat{X}_j, \hat{Z}_i и найти скорректированные прогнозы y_{ij} .

При отсутствии активных ограничений-неравенств аналитическое решение задачи (2) записывается аналогично решению задачи (1), в противном случае решение находится с помощью итерационного процесса.

Для иерархических структур с разбиением по большому числу измерений оптимизационная задача согласования прогнозов записывается аналогично задаче (2) и требует для выполнения условия (3) решения оптимизационных задач, подобных задаче (4).

Алгоритм непараметрического прогнозирования Hist

Рассмотрим задачу согласования прогнозов, полученных с помощью алгоритма Hist. Этот алгоритм подробно рассматривается в статье [15]. Приведем здесь краткое описание варианта этого алгоритма, использованного в настоящей статье.

По заданному временному ряду \mathbf{x} строится гистограмма \mathcal{H} — набор пар

$$\mathcal{H} = \{(y_k, g_k)\}_{k=1}^K, \quad (5)$$

где K — число интервалов $y_k = [y_k^{\min}, y_k^{\max}]$ со средним значением \bar{y}_k , на которые разбита ось значений ряда, g_k — высота столбца гистограммы на интервале y_k , которая равна количеству точек ряда, попавших в этот интервал. Предполагается, что рассматриваемый временной ряд \mathbf{x} стационарен.

Выберем границы гистограммы, число столбцов и разбиение на столбцы следующим образом:

- 1) пусть n — число точек x_t с известными значениями временного ряда;
- 2) выберем число столбцов (обоснование см. в [16]) $K = \lceil 3\sqrt[3]{n} \rceil$, если $K < 5$, то $K = 5$, если $K > 100$, то $K = 100$;
- 3) границы $y_1^{\min} = \min_{t=1, \dots, T} (x_t)$, $y_k^{\max} = \max_{t=1, \dots, T} (x_t)$;
- 4) столбцы выбираются равной ширины.

Для каждого $k = 1, \dots, K$ высота столбца гистограммы g_k равна

$$g_k = \sum_{t=1}^T [x_t \in y_k], \quad (6)$$

где индикаторная функция $[\cdot]$ равна 1, если в скобках стоит истинное логическое выражение, и 0 в противном случае.

Алгоритм непараметрического прогнозирования Hist.

Введем функцию потерь $L(\hat{x}, x)$ — штраф за несоответствие прогнозируемого значения \hat{x} историческому значению x .

Прогнозируемое значение ряда \hat{x} находятся как значение $\hat{x} \in \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_K\}$, соответствующее оптимальному значению свертки распределения $\{g_k\}_{k=1}^K$ и функции потерь L :

$$\hat{x} = \arg \min_{z \in \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_K\}} \sum_{k=1}^K g_k L(z, \bar{y}_k). \quad (7)$$

В текущей работе использовалась абсолютная функция потерь:

$$L(\hat{x}, x) = |\hat{x} - x|.$$

Рассмотрим особенности задачи согласования прогнозов, связанные с выбором алгоритма прогнозирования Hist. Доверительные интервалы полученных прогнозов естественным образом определяются шириной столбцов используемых гистограмм, а именно

$$[\hat{x} - d; \hat{x} + d] = [y_k^{\min}; y_k^{\max}],$$

поэтому

$$d = 0.5(y_k^{\max} - y_k^{\min}).$$

Вычислительный эксперимент

Экспериментальные данные. В эксперименте использованы данные о посуточной загруженности железнодорожных узлов РЖД с 1 января 2007 года по 22 апреля 2008 года. В табл. 1 приведен пример записи базы данных.

Таблица 1: Вид записи базы данных железнодорожных перевозок

Дата погрузки	Станция отправления	Станция назначения	Количество вагонов	Код груза	Род вагона	Суммарный вес груза	Признак маршрутной отправки
2007-01-01	020108	932902	1	1	216	56	9

Коды станций представляют собой шестизначные числа. Станции, в коде которых две первые цифры совпадают, входят в одну железнодорожную ветку. Станций отправления 1566, станций назначения 1902, веток 99. Код груза — натуральное число от 1 до 38; также имеются перевозки, где код груза не указан. Род вагона — натуральное число, в имеющихся данных 75 различных родов вагонов.

Для прогноза были использованы временные ряды отправления вагонов с различными типами грузов по каждой ветке. Временные ряды сильно варьируются по средним и максимальным значениям и дисперсии значений. Также существенная часть рядов — постоянные ряды, все элементы которых равны нулю.

Оценка качества прогноза. Поскольку прогнозируемые временные ряды значительно отличаются друг от друга, необходимо использовать способ оценки качества прогноза, позволяющий проводить сравнение качества для разнородных рядов. Поэтому оценивалось отношение абсолютной ошибки прогноза (MAE) к максимально возможной ошибке. При использовании алгоритма прогнозирования Hist максимально возможная ошибка прогноза — это разница между максимальным и минимальным значениями временного ряда.

$$\text{error} = \frac{|\hat{x} - x|}{\max_{t=1,\dots,T} x_t - \min_{t=1,\dots,T} x_t} = \frac{\text{MAE}}{\max_{t=1,\dots,T} x_t - \min_{t=1,\dots,T} x_t}. \quad (8)$$

Если разница между максимальным и минимальным значениями ряда равна нулю, то предполагалось, что ошибка прогноза такого ряда равна нулю, так как метод Hist прогнозирует постоянный временной ряд его значением. Ошибка усреднялась по 100 контрольным точкам (100 последних из 478 точек истории).

Оценивалось качество прогноза до и после процедуры согласования прогнозов.

Согласование прогнозов для плоской иерархической структуры. Рассматривались группы временных рядов, образующие иерархические структуры вида как на рис. (1) с двумя уровнями иерархии. Поскольку структура экспериментальных данных позволяет разбивать временные ряды как по типам грузов, так и по веткам, были рассмотрены следующие задачи согласования прогнозов.

1. Согласование прогноза суммарного количества отправленных с ветки вагонов со всеми типами грузов и прогнозов отправления всех типов грузов по отдельности с заданной ветки (всего 99 задач согласования прогнозов, в каждой на верхнем уровне иерархии один временной ряд, на нижнем $n = 38$ рядов).
2. Согласование прогноза общего количества вагонов с заданным грузом, отправленных со всех веток, с прогнозом отправления вагонов с этим же грузом со всех веток по отдельности (всего 38 задач согласования прогнозов, в каждой на верхнем уровне иерархии один временной ряд, на нижнем $n = 99$ временных рядов).

Средние ошибки прогноза (формула (8)), полученные для независимых прогнозов, для алгоритма оптимального согласования из [14] и для предлагаемого алгоритма представлены в таблицах 2, 3. Поскольку алгоритм [14] не позволяет учитывать то, что прогнозируемые величины неотрицательны, полученные при согласовании отрицательные прогнозы обнулялись. При решении задачи оптимизации (1) прогнозы постоянных временных рядов (для которых максимально возможная ошибка прогноза равна нулю) исключались из рассмотрения и не корректировались.

Таблица 2: Средние ошибки прогнозов для согласования по грузам

	Независимые прогнозы	Оптимальное согласование [14]	Предлагаемый алгоритм
Верхний уровень иерархии	0.0502	0.0579	0.0502
Нижний уровень иерархии	0.0059	0.0081	0.0058

Таблица 3: Средние ошибки прогнозов для согласования по веткам

	Независимые прогнозы	Оптимальное согласование [14]	Предлагаемый алгоритм
Верхний уровень иерархии	0.0846	0.0579	0.0846
Нижний уровень иерархии	0.0059	0.0062	0.0058

В работе [14] было отмечено, что на практике алгоритм оптимального согласования позволяет уменьшить ошибку прогнозирования рядов из верхних уровней иерархии, но увеличивает ошибку прогноза временных рядов из нижнего уровня иерархии по сравнению с независимыми прогнозам всех временных рядов. Проведенный эксперимент показывает, что для используемых экспериментальных данных эта тенденция сохраняется, в то время как согласование прогнозов с помощью решения оптимизационной задачи (1) позволяет проводить согласование без увеличения ошибки прогнозирования на обоих уровнях иерархии.

Согласование прогнозов для неплоской иерархической структуры. Предлагаемый алгоритм, в отличие от алгоритма оптимального согласования [14] позволяет проводить согласование прогнозов для неплоских иерархических структур. Рассматривалась иерархическая структура, изображенная на рис. 2. Временной ряд S в корне структуры соответствует отправлению вагонов со всеми типами грузов со всех веток. На следующем уровне этот ряд разделялся

1. по грузам ($m = 38$ временных рядов, соответствующих отправлению каждого из 38 грузов со всех веток);
2. по веткам ($n = 99$ временных рядов, соответствующих отправлению с каждой из 99 веток всех грузов).

На третьем уровне иерархии разбиение происходит одновременно по типам грузов и веткам ($38 * 99$ временных рядов).

Для согласования прогнозов были решены оптимизационные задачи (2) и (4). Ошибка прогноза оценивалась также по формуле (8) на втором и третьем уровнях иерархии. Результаты представлены в таблице 4, из которой видно, что ошибка прогноза на верхнем уровне иерархии практически не изменяется после согласования прогнозов, а на нижнем уровне иерархии есть ухудшение качества прогнозов. Таким образом, поведение предлагаемого алгоритма схоже с поведением алгоритма из [14], который неприменим для иерархической структуры такого типа.

Таблица 4: Средние ошибки прогнозов при неплоской иерархической структуре

	Независимые прогнозы	Предлагаемый алгоритм
Верхний уровень по веткам	0.0502	0.0503
Верхний уровень по грузам	0.0846	0.0845
Нижний уровень	0.0059	0.0150

Заключение

Предложен алгоритм согласования прогнозов иерархических временных рядов, основанный на решении оптимизационной задачи с ограничениями. Предлагаемый алгоритм позволяет проводить согласование прогнозов в случае сложной неплоской иерархической структуры временных рядов, а также позволяет в ходе процедуры согласования учитывать физические ограничения на прогнозируемые величины. Проведенный эксперимент показал, что предлагаемый алгоритм не уступает по качеству прогнозов алгоритму оптимального согласования и при этом охватывает более широкий класс задач, нежели алгоритм оптимального согласования.

Литература

- [1] *Grunfeld, Y., Griliches, Z.* Is aggregation necessarily bad? // *The Review of Economics and Statistics*, 1960. Vol. 42(1). P. 1–13.
- [2] *Fogarty, D. W., Blackstone, J. H., Hoffman, T. R.* *Production and Inventory Management*, 2nd edn. — South-Western Publication Co. Cincinnati, OH, 1990.
- [3] *Narasimhan, S. L., McLeavey, D. W., Billington, P. J.* *Production Planning and Inventory Control*, 2nd edn. — Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [4] *Fliedner, G.* An investigation of aggregate variable time series forecast strategies with specific subaggregate time series statistical correlation // *Computers and Operations Research*, 1999. Vol. 26(10–11). P. 1133–1149.
- [5] *Orcutt, G. H., Watts, H. W., Edwards, J. B.* Data aggregation and information loss // *The American Economic Review*, 1968. Vol. 58(4). P. 773–787.
- [6] *Edwards, J. B., Orcutt, G. H.* Should aggregation prior to estimation be the rule? // *The Review of Economics and Statistics*, 1969. Vol. 51(4). P. 409–420.
- [7] *Shlifer, E., Wolff, R. W.* Aggregation and proration in forecasting // *Management Science*, 1979. Vol. 25(6). P. 594–603.
- [8] *Schwarzkopf, A. B., Tersine, R. J., Morris, J. S.* Top-down versus bottom-up forecasting strategies // *International Journal of Production Research*, 1998. Vol. 26(11). P. 1833–1843.
- [9] *Tiao, G. C., Guttman, I.* Forecasting contemporaneous aggregates of multiple time series // *Journal of Econometrics*, 1980. Vol. 12(2). P. 219–230.
- [10] *Kohn, R.* When is an aggregate of a time series efficiently forecast by its past? // *Journal of Econometrics*, 1982. Vol. 18(3). P. 337–349.
- [11] *Shing, N. K.* *A Study of Bottom-up and Top-down Forecasting Methods* // M.Sc. thesis. Royal Melbourne Institute of Technology, 1993.
- [12] *Kahn, K. B.* Revisiting top-down versus bottom-up forecasting // *The Journal of Business Forecasting*, 1998. Vol. 17(2). P. 14–19.
- [13] *Fliedner, G.* Hierarchical forecasting: issues and use guidelines // *Industrial Management and Data Systems*, 2001. Vol. 101(1). P. 5–12.

- [14] Hyndman, R. J., Ahmed, R. A., Athanasopoulos, G., Shang, H. L. 2011. Optimal combination forecasts for hierarchical time series // *Computational Statistics and Data Analysis*, 2011. Vol. 55(9). P. 2579–2589.
- [15] Вальков, А. С., Кожанов, Е. М., Медведникова, М. М., Хусаинов, Ф. И. Непараметрическое прогнозирование загруженности системы железнодорожных узлов по историческим данным // *Машинное обучение и анализ данных*, 2012. Т. 1(4). С. 448–465.
- [16] Scott D. W. On optimal and data-based histograms // *Biometrika*, 1979. Vol. 66(3). P. 605–610.

References

- [1] Grunfeld, Y., Griliches, Z. 1960. Is aggregation necessarily bad? *The Review of Economics and Statistics*. 42(1): 1–13.
- [2] Fogarty, D. W., Blackstone, J. H., Hoffman, T. R. 1990. *Production and Inventory Management*. 2nd edn. South-Western Publication Co. Cincinnati, OH.
- [3] Narasimhan, S. L., McLeavey, D. W., Billington, P. J. 1995. *Production Planning and Inventory Control*. 2nd edn. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Fliedner, G. 1999. An investigation of aggregate variable time series forecast strategies with specific subaggregate time series statistical correlation. *Computers and Operations Research*. 26(10–11): 1133–1149.
- [5] Orcutt, G. H., Watts, H. W., Edwards, J. B. 1968. Data aggregation and information loss. *The American Economic Review*. 58(4): 773–787.
- [6] Edwards, J. B., Orcutt, G. H. 1969. Should aggregation prior to estimation be the rule? *The Review of Economics and Statistics*. 51(4): 409–420.
- [7] Shlifer, E., Wolff, R. W. 1979. Aggregation and proration in forecasting. *Management Science*. 25(6): 594–603.
- [8] Schwarzkopf, A. B., Tersine, R. J., Morris, J. S. 1988. Top-down versus bottom-up forecasting strategies. *International Journal of Production Research*. 26(11): 1833–1843.
- [9] Tiao, G. C., Guttman, I. 1980. Forecasting contemporaneous aggregates of multiple time series. *Journal of Econometrics*. 12(2): 219–230.
- [10] Kohn, R. 1982. When is an aggregate of a time series efficiently forecast by its past? *Journal of Econometrics*. 18(3): 337–349.
- [11] Shing, N. K. 1993. *A Study of Bottom-up and Top-down Forecasting Methods*. M.Sc. thesis. Royal Melbourne Institute of Technology.
- [12] Kahn, K. B. 1998. Revisiting top-down versus bottom-up forecasting. *The Journal of Business Forecasting*. 17(2): 14–19.
- [13] Fliedner, G. 2001. Hierarchical forecasting: issues and use guidelines. *Industrial Management and Data Systems*. 101(1): 5–12.
- [14] Hyndman, R. J., Ahmed, R. A., Athanasopoulos, G., Shang, H. L. 2011. Optimal combination forecasts for hierarchical time series. *Computational Statistics and Data Analysis*. 55(9): 2579–2589.
- [15] Val'kov, A. S., Kozhanov, E. M., Medvednikova, M. M., Khusainov, F. I. 2012. Neparametricheskoe prognozirovanie zagruzhennosti sistemy zheleznodorozhnykh uzlov po istoricheskim dannym [Non-parametric forecasting of railroad stations occupancy according to historical data]. *Mashinnoe obuchenie i analiz dannykh [Journal of Machine Learning and Data Analysis]*. 1(4): 448–465.
- [16] Scott D. W. 1979. On optimal and data-based histograms. *Biometrika*. 66(3): 605–610.