На правах рукописи

Стрижов Вадим Викторович

СОГЛАСОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПРИ ПОСТРОЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНДИКАТОРОВ

05.13.11 — математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2002

Работа выполнена в Вычислительном центре имени А. А. Дородницына Российской академии наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук В. В. Шакин

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор С. А. Айвазян
кандидат физико-математических наук И. Ф. Шахнов

Ведущая организация:

Институт вычислительной математики РАН

Защита состоится "___" ______________ 2002 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д002.017.02 Вычислительного центра имени А. А. Дородницына РАН по адресу 119991, Москва, ГСП-1, ул. Вавилова, 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Вычислительного центра имени А. А. Дородницына РАН.

Автореферат разослан "___" ______________ 2002 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. В. В. Рязанов

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. Важной задачей анализа данных, требующей количественных методов оценки, является задача согласования экспертных оценок при построении интегральных индикаторов. Её решение нужно для объективного судейства в спорте, анализа состояния социальных, экономических, экологических систем и для многих других предметных областей. Этой задаче посвящено много работ как зарубежных, так и отечественных исследователей.

Содержательное основание диссертации составляют работы в области снижения размерности признакового пространства и экспертно-статистический метод. В этой области работали С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин и В. В. Шакин. Термин "экспертно-статистический метод" впервые был введен С. А. Айвазяном[1]. В его работе было предложено оценить удельный вес влияния частных показателей на общее, агрегированное состояние эффективности и построить интегральный индикатор множества объектов в виде линейной комбинации показателей объектов. Предложены[2] такие способы построения интегрального индикатора, как метод главных компонент, факторный анализ, метод экстремальной группировки признаков, многомерное шкалирование и отбор наиболее информативных показателей.

В. В. Шакиным[3] предложен метод объективизации работы жюри, основная идея которого заключалась в двойственности экспертной оценки, когда эксперты могли оценивать как веса показателей, так и ценность объектов. В настоящей работе на основе этого метода был развит метод согласования экспертных оценок.

[1] Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. — М.: ЮНИТИ, 1998. — С. 363.

[2] Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика /Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 607 с.

[3] Шакин В. В. К объективизации работы жюри. Линейная модель связи ценности объектов и индексов. /в кн. под ред. Кулагина А. С. Методика и техника статистической обработки материалов социологических исследований идеологической работы. — М.: Академия общественных наук при ЦК КПСС, 1972. — С. 251-263.

Аналитическое основание составляют работы по сингулярному разложению и регуляризации линейных операторов. Использовалась, в частности, работа Дж. Форсайта и К. Молера[4], в которой было описано сингулярное разложение и доказаны необходимые теоремы. В работе П. К. Хансена[5] изложены проблемы регуляризации линейных операторов при решении систем вырожденных уравнений. В этой работе рассматриваются как методы регуляризации А. Н. Тихонова, так и регуляризация при помощи сингулярного разложения.

Термин “согласование экспертных оценок” был введен Б. Р. Литваком[6]. Методы, описанные в его работах, основаны на последовательной коррекции экспертами своих оценок.

Термин “интегральный индикатор” — свертка данных, наиболее информативно описывающих объект, был введен С. А. Айвазяном[7].

В данной работе описано три подхода к построению интегрального индикатора. С помощью процедуры построения интегрального индикатора “без учителя” был получен интегральный индикатор, который, по мнению экспертов, оказался неудовлетворительным. Согласно второму подходу, интегральный индикатор строился “с учителем”, как взвешенная сумма измерений показателей каждого объекта. По-видимому[8], веса назначались неверно, что также приводило к результатам, спорным с точки зрения экспертов.

Предлагаемый подход имеет целью согласовать экспертные оценки и заключается в поиске компромиссного решения. Согласно этому подходу, экспертам предоставляется возможность разрешить противоречие меж-

[4]Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М.: Мир, 1969. — С. 15-18.

[5]Hansen, Per Christian. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems, SIAM, Philadelphia, 1998. — P. 29-31.

[6]Литвак Б. Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа. — М.: Радио и связь, 1982. — С. 69-88.

[7]Айвазян С. А. Сравнительный анализ интегральных характеристик качества жизни населения субъектов Российской Федерации. /Препринт #WP/2001/125. — М.:ЦЭМИ РАН, 2001. — 65 с.

[8]Орлов А. И. Современный этап развития теории экспертных оценок. /Заводская лаборатория, 1996, №1.

ду интегральными индикаторами объектов, весами показателей и измеряемыми данными.

Цели и задачи работы. Теоретическая цель настоящей работы — развитие методов построения интегральных индикаторов, основанных как на информации об анализируемых объектах, так и на экспертных оценках. Практической целью работы является создание программного обеспечения для построения интегральных индикаторов и согласования экспертных оценок.

Методы исследования, материалы. Методологической основой для выполнения настоящей работы послужили современные исследования в теории принятия решений. Использовались, в частности, работы В. В. Шакина по измерению связи между качественными признаками, работы С. А. Айвазяна по построению интегральных индикаторов и методы регуляризации при решении некорректно поставленных задач.

Для апробации предложенных расчётных процедур использовались данные и экспертные оценки, предоставленные Департаментом охраны окружающей среды и экологической безопасности Министерства природных ресурсов России в рамках проекта Глобального экологического фонда “Сохранение биоразнообразия”.

Обоснованность научных положений. Теоретические положения диссертации, сформулированные в виде теорем и более частных утверждений, строго доказаны. Выводы, сделанные в предметной области, одобрены экспертами Представительства Всемирного союза охраны природы для стран СНГ.

Научная новизна.

1. Введен оператор согласования экспертных оценок.

2. Предложены процедуры согласования экспертных оценок для линейных и ранговых шкал.

3. Предложена процедура регуляризации оператора, отображающего пространство весов показателей в пространство интегральных ин-

дикаторов, и доказана его устойчивость.

4. Создано программное обеспечение для построения интегральных индикаторов и согласования экспертных оценок.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные процедуры нахождения интегрального индикатора могут использоваться в задачах принятия решения, для согласования экспертных оценок состояния объектов, построения экологических и социальных индикаторов, а также индикаторов качества, таких как интегральный индикатор качества жизни, индекс развития человеческого потенциала.

Апробация работы. Работа поддержана грантом РФФИ 00-01-00197 "Критерии качества жизни и устойчивого развития для социально-экономических систем в экстремальных условиях".

Работа выполнена в рамках реализации проекта ГЭФ "Сохранение биологического разнообразия России" и программы Представительства ВСОП для стран СНГ по экологическим сетям и охраняемым природным территориям. Предложенная в данной работе модель протестирована на данных — результатах мониторинга заповедников РФ за 1996-2000 годы.

Материалы диссертации докладывались на Всероссийской конференции "Математические методы распознавания образов" — ММРО-10, Москва, 19-22 ноября 2001 г. и ММРО-9, Москва, 15-19 ноября 1999 г.; Научном семинаре "Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов" — Москва, Центральный экономико-математический институт РАН, 17 апреля 2002 г. и 28 марта 2001 г.; 8-й международной конференции "Исследование операций — KOI-2000" — Ровинь, Хорватия, 27-29 сентября 2000 г.

Созданное в рамках данной работы программное обеспечение и методики используются компанией GAIA UNLIMITED, Inc., USA для оценки влияния работы электростанций на качество окружающей среды и Представительством ВСОП для стран СНГ для оценки эффективности управления государственными заповедниками России. По теме диссертации опубликовано 8 работ.

Структура диссертации. Во введении описана актуальность и цели работы. Приведен обзор литературы, посвященной данной тематике. В первом разделе описаны известные способы нахождения интегрального индикатора без обучающей выборки. Во втором разделе описаны предложенные процедуры согласования экспертных оценок и регуляризации оператора, отображающего вектор из пространства экспертных оценок весов показателей в пространство интегральных индикаторов. В третьем разделе описана предложенная модель управления с обратной связью, в рамках которой оценивается эффективность работы заповедников, и описаны результаты вычисления интегрального индикатора с использованием данных ежегодных отчетов заповедников и экспертных оценок. Четвертый раздел посвящен обсуждению процедур нахождения интегральных индикаторов и полученных результатов. В заключении подведены итоги работы по оценке эффективности управления заповедниками. Диссертация содержит 106 страниц машинописного текста, 16 рисунков, 7 таблиц. Список литературы включает 64 наименования.

Содержание работы

Введение содержит общую характеристику работы. Приведено обоснование актуальности темы, сформулированы цели и задачи исследования. Сделан обзор работ, посвященных данной тематике. Указаны основные способы нахождения интегральных индикаторов и роль экспертов.

В первом разделе приведены известные методы построения интегральных индикаторов. Описана модель порождения данных. Приведены четыре различных метода нахождения интегрального индикатора “без учителя”, описана процедура кластеризации объектов при построении индикаторов.

Задано множество $\Upsilon = \{\upsilon_1, ..., \upsilon_m\}$ объектов и множество показателей $\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$. Объект υ_i описан с вектором-строкой $\mathbf{a}_{i\cdot} = \langle a_{i1}, ..., a_{in}\rangle$: $\mathbf{a}_{i\cdot} \in \mathbb{R}^n$. Множество описаний объектов представлено в виде матрицы исходных данных $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$.

Определение 1. *Объект υ_i, имеющий максимальный по значению интегральный индикатор (наибольшую экспертную оценку, если она рассматривается в качестве интегрального индикатора), $q_i = \max\{q_1, ..., q_m\}$, является наилучшим. Объект υ_i, имеющий минимальный по значению интегральный индикатор $q_i = \min\{q_1, ..., q_m\}$, является наихудшим.*

Определение 2. *Показатель ψ_j, имеющий максимальный по значению вес (наибольшую экспертную оценку, если она рассматривается в качестве веса показателя), $w_j = \max\{w_1, ..., w_n\}$, является наиважнейшим при нахождении интегрального индикатора.*

Выполнены следующие предложения. Максимальное значение элемента $a_{\xi\zeta}$ измеряемого показателя ψ_ζ с номером ζ означало, что ξ-й объект υ_ξ наилучший по данному показателю. Также, минимальное значение элемента $a_{\xi\zeta}$ показателя ψ_ζ означало, что объект υ_ξ является наихудший по данному показателю,

$$\begin{aligned} a_{\xi\zeta} = \max\{a_{i\zeta}\}_{i=1}^m &\Rightarrow q_\xi = \max\{q_1, ..., q_m\}, \\ a_{\eta\vartheta} = \min\{a_{i\vartheta}\}_{i=1}^m &\Rightarrow q_\eta = \min\{q_1, ..., q_m\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Векторы $\mathbf{a}_{\cdot j} = \langle a_{1j}, ..., a_{mj} \rangle^T : \mathbf{a}_{\cdot j} \in A$ нормированы так, что справедливо равенство

$$a_{ij} = 1 - \frac{|a_{ij} - a_j^{opt}|}{\max([a_j^{opt} - \min(\mathbf{a}_{\cdot j})], [\max(\mathbf{a}_{\cdot j}) - a_j^{opt}])}, \; i = 1, ..., m, \; j = 1, ..., n, \tag{2}$$

где оптимальное значение $\mathrm{opt}(\mathbf{a}_{\cdot j}) : \min(\mathbf{a}_{\cdot j}) < \mathrm{opt}(\mathbf{a}_{\cdot j}) < \max(\mathbf{a}_{\cdot j})$ задано.

Для нахождения интегральных индикаторов “без учителя” использовались метод главных компонент, метод сингулярных компонент и расслоение Парето. Использовалась также взвешенная сумма $\mathbf{q} = A\mathbf{w}_0$, где веса $\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, ..., w_{0n} \rangle^T : \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$ назначались экспертами.

Определение 3. *Интегральным индикатором объекта $\upsilon_i \in \Upsilon$ с номером i называется скаляр $q_i \in \mathbb{R}^1$, поставленный в соответствие набору $\mathbf{a}_{i\cdot}$ описаний объекта.*

При рассмотрении множества объектов Υ вектор $\mathbf{q} = \langle q_1, ..., q_m \rangle^T$: $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ считался интегральным индикатором множества объектов, описанных матрицей $A = \{\mathbf{a}_{i\cdot}\}_{i=1}^m : A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Метод главных компонент[9]**.** Для нахождения первой главной компоненты нормированной (2) и центрированной матрицы $\tilde{A}$ требовалось найти такие коэффициенты $C = \{c_{ij}\}_{i,j}^{n,n}$, что линейные комбинации векторов $\mathbf{z}_{\cdot i} = \tilde{A}\mathbf{c}_{\cdot i}$, $\quad i = 1, ..., n$ обладали бы наибольшей дисперсией $\max(\mathrm{D}\mathbf{z}_{\cdot 1} + \mathrm{D}\mathbf{z}_{\cdot 2} + ... + \mathrm{D}\mathbf{z}_{\cdot n})$ при ограничениях нормировки $\sum_{i=1}^m c_{ij}^2 = 1, j = 1, ..., n$ и $\sum_{i=1}^m c_{ij}c_{ik} = 0, j, k = 1, ..., n, j \neq k$. Значение интегрального индикатора $\mathbf{q}_1$ вычислялось как проекция векторов-строк матрицы на первую главную компоненту, $\mathbf{q}_1 = \tilde{A}\mathbf{c}_{\cdot 1}$.

Метод сингулярных компонент. Процедура нахождения интегрального индикатора $\mathbf{q}_2$ по сингулярному разложению заключалась в следующем. Было найдено сингулярное разложение матрицы исходных данных $A = U\Lambda V^T$.

Теорема 1. *(Дж. Форсайт) Для любой вещественной $(n \times n)$-матрицы A существуют две вещественные ортогональные $(n \times n)$-матрицы U и V, такие, что U^TAV диагональная матрица Λ. Матрицы U и V выбираются так, чтобы диагональные элементы Λ имели вид $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_r > \lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0$, где r — ранг матрицы A.*

Была найдена проекция всех векторов $\mathbf{a}_{i\cdot}$ на сингулярный вектор, соответствующий наибольшему сингулярному числу λ_1 матрицы A, $\mathbf{q}_2 = U\mathrm{diag}(\lambda_1, 0, \cdots, 0)$.

Расслоение Парето[10]**.** Описания $\{\mathbf{a}_{i\cdot}\}$ множества объектов Υ были

[9]Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика /Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989. — С. 334.

[10]Шакин В. В. Парето-классификация конечных выборок. Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества продукции. V-я научная конференция стран СНГ. Тезисы докладов. — М.: Центральный экономико-математический институт РАН, 1993. — С. 96-97.

представлены в виде

$$T = \bigcup_{\zeta=1}^{l} S_\zeta, \quad S_\zeta \cap S_\eta = \emptyset, \text{если } \zeta = \eta,$$

где множество Парето ζ-го порядка $S_\zeta = \{\mathbf{a}_{i\cdot} : i \in \{1, ..., m\}\}$ и l — число разбиений конечного множества $\{\mathbf{a}_{i\cdot}\}$.

Определение 4. *Вектор $\mathbf{a}_{\xi\cdot} = \langle a_{\xi 1}, ..., a_{\xi n}\rangle$ называется недоминируемым, если не найдется ни одного вектора $\mathbf{a}_{i\cdot}$, такого, что $a_{ij} > a_{\xi j}$, $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.*

Для всех $\zeta = 1, ..., l$ множество S_ζ было определено как набор недоминируемых векторов, не принадлежащих множеству $S_{\zeta-1}$, то есть,

$$S_\zeta = \{\mathbf{a}_{\xi\cdot} : \mathbf{a}_{\xi\cdot} \notin S_{\zeta-1}, \forall i \in \{1, ..., m\}, i \neq \xi \exists j \in \{1, ..., n\} : a_{\xi j} \geqslant a_{ij}\}_{\xi=1}^{m}.$$

В соответствие каждому вектору $\mathbf{a}_{\xi\cdot}$, $\xi = 1, ..., m$ был поставлен индекс ζ множества S_ζ, которому принадлежит вектор $\mathbf{a}_{\xi\cdot}$. Полученное множество $\Xi = \{\zeta_\xi\}_{\xi=1}^{m}$ приведем к виду, удовлетворяющему (1), $\mathbf{q}_3 = \{\max(\Xi) - \zeta_\xi\}_{\xi=1}^{m}$.

Во втором разделе описаны способы согласования экспертных оценок, выставленных в линейных и ранговых шкалах. Обсуждалась регуляризация при нахождении согласованных оценок.

Каждому объекту v_i была поставлена в соответствие экспертная оценка q_{0i}, также, каждому показателю ψ_j была поставлена в соответствие экспертная оценка w_{0j}, то есть заданы векторы $\mathbf{q}_0 = \langle q_{01}, ..., q_{0m}\rangle^T : \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, ..., w_{0n}\rangle^T : \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Тройку $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ представлена с помощью таблицы, в которой каждый элемент вектора $\mathbf{q}_0$ поставлен в соответствие строке, а каждый элемент вектора $\mathbf{w}_0$ поставлен в соответствие столбцу матрицы A:

$$\begin{array}{c|c} & \mathbf{w}_0^T \\ \hline \mathbf{q}_0 & A \end{array}.$$

В общем случае вектор экспертной оценки $\mathbf{q}_0$ объектов и вектор взвешенной суммы значений показателей объектов $A\mathbf{w}_0$ различны, $\mathbf{q}_0 \neq A\mathbf{w}_0$, также, $\mathbf{w}_0 \neq A^+\mathbf{q}_0$, где A — линейный оператор, представляемый при помощи данной матрицы, и пусть существует A^+ — оператор, псевдообратный[11] оператору A.

Определение 5. *Согласованными значениями интегрального индикатора и весов показателей называются такие значения* $\hat{\mathbf{q}}$ *и* $\hat{\mathbf{w}}$*, при которых выполняется условие*

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}} &= A\hat{\mathbf{w}}, \\ \hat{\mathbf{w}} &= A^+\hat{\mathbf{q}}. \end{cases} \tag{3}$$

Определение 6. *Оператором согласования* Φ *экспертных оценок называется оператор, переводящий тройку* $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ *в тройку* $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$*, где векторы* $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}$ *удовлетворяют условию (3):*

$$\Phi : (\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A) \longrightarrow (\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A).$$

α-согласование. Оператор согласования был определён следующим образом. Задана A — матрица линейного оператора, отображающего пространство весов показателей $W \ni \mathbf{w}_0$ в пространство интегральных индикаторов объектов $Q \ni \mathbf{q}_0$:

$$A : W \longrightarrow Q,$$

и A поставлен в соответствие псевдообратный оператор A^+, отображающий пространство интегральных индикаторов в пространство весов показателей $A^+ : Q \longrightarrow W$, то есть, $A^+A = I_n$, $AA^+ = I_m$, $A^+AA^+ = A^+$, $AA^+A = A$, где I_n и I_m — единичные матрицы размерностей, соответствующих индексам.

Существует сингулярное разложение матрицы A вида $A = U\Lambda V^T$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_R)$, $R = \min(m, n)$, и

$$U^TU = I_m, VV^T = I_n. \tag{4}$$

Теорема 2. *Матрица* $A^+ = V^T\Lambda^{-1}U$ *является для матрицы* A *псевдообратной.*

[11] Голуб Дж., Ван-Лоун Ч. Матричные вычисления — М.: Мир, 1999. — С. 223.

Определим A^+ как

$$A^+ = V\Lambda_r^{-1}U^T, \tag{5}$$

где $\Lambda_r^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_r^{-1}, 0, ..., 0)$ — диагональная матрица размерности $n \times n$.

Исходные значения векторов интегрального индикатора и весов показателей были обозначены соответственно $\mathbf{q}_0 : \mathbf{q}_0 \in Q \subseteq \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{w}_0 : \mathbf{w}_0 \in W \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0 \text{ и } \mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0.$$

Заданы отрезки $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0] \subset Q$ и $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0] \subset W$. Евклидова длина отрезков $\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1\|$ и $\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|$ была использована как мера несогласованности экспертных оценок. Были найдены согласованные оценки на этих отрезках. Для выпуклые линейные комбинации векторов $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$, и $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$ были представлены в виде:

$$\begin{array}{rcl} \{\mathbf{w}_\alpha : \mathbf{w}_\alpha & = & (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha\mathbf{w}_1\} \ \in \ [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1], \\ \{\mathbf{q}_\beta : \mathbf{q}_\beta & = & \beta\mathbf{q}_0 + (1-\beta)\mathbf{q}_1\} \ \in \ [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1], \end{array}$$

где $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

Теорема 3. *Для любых значений $\alpha, \beta \in [0, 1]$, значения векторов $\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{q}_\beta$ удовлетворяют требованиям согласования, то есть, $A\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{q}_\beta$, причем $\alpha = 1 - \beta$.*

Таким образом, согласованные экспертные оценки найдены с помощью выражения

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{w}_\alpha & = & (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0, \\ \mathbf{q}_\alpha & = & \alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0, \end{array} \tag{6}$$

где $\alpha : \alpha \in [0, 1]$ — параметр доверия экспертным оценкам интегральных индикаторов объектов, либо экспертным оценкам весов показателей. При значении $\alpha = 0$ игнорируются экспертные оценки объектов и учитываются оценки весов; при значении $\alpha = 1$ игнорируются экспертные оценки весов и учитываются оценки объектов.

Теорема 4. *Тройка $(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha, A)$, полученная процедурой α-согласования (6) удовлетворяет требованиям согласования (3).*

Таким образом, с помощью выражения (6) выбран параметр α, определяющий согласованные значения векторов экспертных оценок $\mathbf{q}_\alpha = A\mathbf{w}_\alpha$. Была сделана оценка невязки при выбранном параметре α. Евклидово расстояние между исходными векторами $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ и полученными векторами $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ в пространстве интегральных индикаторов и в пространстве весов соответственно равны

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \|\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_0\|^2, \\ \delta^2 &= \|\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_0\|^2. \end{aligned}$$

В качестве критерия выбора параметра α было выбрано условие минимума расстояния между начальными и согласованными экспертными оценками в обоих пространствах Q и W. Учитывая, что размерности этих пространств соответственно равны m и n, нормируем квадраты расстояний и найдены такие согласованные значения векторов $\mathbf{q}_\alpha$ и $\mathbf{w}_\alpha$, что они удовлетворяют условию

$$\frac{\varepsilon^2}{m-1} = \frac{\delta^2}{n-1}. \tag{7}$$

На практике экспертам предлагалось выбрать значение параметра α в зависимости от предпочтений оценок объектов или оценок показателей. Полученные результаты предлагались экспертам на обсуждение в следующем виде:

init		$\mathbf{w}_0^T$
	fin	$\mathbf{w}_\alpha^T$
$\mathbf{q}_0$	$\mathbf{q}_\alpha$	A

При изменении параметра доверия экспертов α к экспертным оценкам объектов и показателей или при изменении самих экспертных оценок вышеописанная процедура повторялась, и на обсуждение экспертов передавались вновь полученные результаты.

γ^2**-согласование.** Согласованное решение было определено как решение, удовлетворяющее условию (3), при котором расстояние от согласованных векторов $\mathbf{q}_\gamma$ и $\mathbf{w}_\gamma$, таких, что $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$ до, соответственно, векторов экспертных оценок $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{w}_0$ минимально. Пусть

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2, \\ \delta^2 &= \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Решение задачи нахождения минимального расстояния от согласованных векторов до векторов экспертных оценок принял вид

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg\min_{\mathbf{w}\in W}(\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2), \tag{9}$$

где весовой множитель $\gamma^2 \in (0, \infty)$ — определяет степень компромисса между оценкой объектов и показателей. При малых значениях γ^2 в большей степени учитывается экспертная оценка объектов, а при больших значениях γ^2 в большей степени учитывается экспертная оценка показателей.

Теорема 5. *Функционал* $(\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2)$ *достигает единственного минимума на множестве* $\mathbf{w}_\gamma \in W$ *в точке*

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1}(A^T\mathbf{q}_0 + \gamma^2\mathbf{w}_0). \tag{10}$$

Теорема 6. *Тройка* $(\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma, A)$*, полученная процедурой* γ^2*-согласования (10) удовлетворяет требованиям согласования (3).*

Параметр γ^2 для получения согласованных векторов $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$ и $\mathbf{w}_\gamma$ выбирался из условия (7).

τ**-согласование.** Предложена процедура, где с оценками $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ разрешены любые монотонные преобразования. То есть, введено отношение порядка на множестве элементов векторов $\mathbf{w}_0 = \{w_j : w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_n\}_{j=1}^n$ и $\mathbf{q}_0 = \{q_i : q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_m\}_{i=1}^m$, которое задает соответственно конусы[12] $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^m$. При нахождении согласованных оценок вводились монотонные корректирующие функции $T_\mathcal{Q} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$ и $T_\mathcal{W} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$, приближающие начальные экспертные оценки при сохранении отношения порядка.

Дана тройка $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$. Найдем такие векторы $\mathbf{q}_\tau = T_\mathcal{Q}(\mathbf{q}_0)$ и $\mathbf{w}_\tau = T_\mathcal{W}(\mathbf{w}_0)$, что выполняется условие минимума невязки

$$AT_\mathcal{W}(\mathbf{w}_0) - T_\mathcal{Q}(\mathbf{q}_0) = \Delta. \tag{11}$$

[12] Карманов В. Г. Математическое программирование. — М.: Наука, 1980. — С. 29.

Для $k=0,...,K$ указаны такие векторы

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{k+1} &= T_{\mathcal{W},k}(\mathbf{w}_k, A^{+}\mathbf{q}_k),\\ \mathbf{q}_{k+1} &= T_{\mathcal{Q},k}(\mathbf{q}_k, A\mathbf{w}_k),\end{aligned} \qquad (12)$$

которая доставляют минимум функционалу $\|\Delta_k\|^2 = \|A\mathbf{w}_k - \mathbf{q}_k\|^2$. Векторы $\mathbf{q}_\tau, \mathbf{w}_\tau$, найдены в результате композиции $T_{\mathcal{Q}} = T_{\mathcal{Q},1} \circ ... \circ T_{\mathcal{Q},K}$ и $T_{\mathcal{W}} = T_{\mathcal{W},1} \circ ... \circ T_{\mathcal{W},K}$.

Для нахождения корректирующей функции T рассмотрены два множества $\mathbf{x} = \{x_1, ..., x_m\}$ и $\mathbf{t} = \{t_1, ..., t_m : t_1 \leqslant ... \leqslant t_m\}$. Множество пар $\phi = \{(t_1, x_1), ..., (t_m, x_m)\}$ задают функцию ϕ, и $x_i = \phi(t_i)$. Функция ϕ, в общем случае, немонотонна. Найдена такая монотонную функцию $f : t \longrightarrow x$, $f \in P_m$ которая аппроксимирует ϕ,

$$f(t) = \arg\min_{f \in P_m} \sum_{i=1}^{m} \big(f(t_i) - \phi(t_i)\big)^2,$$

где P_m множество всех возрастающих полиномов степени $p \leqslant m$. Также, найдена такая функцию $\varphi : t \longrightarrow x, \varphi \in \Theta$, которая интерполирует множество пар ϕ:

$$\varphi(t) = \arg\min_{\varphi \in \Theta} \|\varphi(t) - \phi(t)\|,$$

где Θ — множество полиномиальных сплайнов с m узлами степени r дефекта 1.

Для приближения функции φ функцией f был использован метод касательных Ньютона-Канторовича [13]. Функция $f(t), \varphi(t)$ рассматривалась на отрезке $S = [a, b] \ni t$.

Требуется найти гомеоморфизм $\vartheta : S \longrightarrow S, \vartheta(t) = t + \tau(t)$, такой, что

$$\vartheta = \arg\min_{\tau \in S} \|f(t) - \varphi(\vartheta(t))\|^2,$$

при значении $\tau = O(t)$. Для нахождения τ функция $\varphi(\vartheta(t))$ представлена в виде $\varphi(\vartheta(t)) = \varphi(t) + \tau(t)\varphi'(t) + O(\tau^2(t))$. Для решения задачи оптимизации

$$\tau_\epsilon(t) = \arg\min_{\tau \in S}(\|f(t) - \varphi(t)\|^2 + \epsilon^2\|\tau(t)\|^2)$$

[13] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — С. 323-329.

использовано выражение

$$\tau_\epsilon(t) = \frac{(f(t) - \varphi(t))\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2 + \epsilon^2}.$$

Искомая функция $T : \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}$ была задана следующим образом. Подставляя в найденную функцию $\varphi(\vartheta(t))$ значения t_i из ϕ получены скорректированные оценки $y_i = \varphi(\vartheta(t_i))$, $i = 1, ..., m$. Параметр ϵ^2, определяющий, насколько велика разность между значениями, которые принимает функция φ в точках t и $\vartheta(t)$, подбирались таким образом, чтобы функция $T(\vartheta(t))$ была монотонной.

Регуляризация при согласовании экспертных оценок. Предложено следующее решение проблемы выбора алгоритма вычисления псевдообратного оператора $A^+ : Q \longrightarrow W$. Задано множество $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_k\}$, алгоритмов вычисления псевдообратного оператора A^+. Из данного множества выбирается такой алгоритм ω, что для полученного $A^+ = A^+(\omega)$ имеет место $\min_{\omega\in\Omega}(\frac{\varepsilon^2}{m-1} + \frac{\delta^2}{n-1})$, где $\varepsilon^2 = \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_0\|^2$, и $\delta^2 = \|\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_0\|^2$.

Для решения задачи были предложены два способа нахождения псевдообратного оператора A^+: регуляризация псевдообратного оператора методом Тихонова[14] и обращение усеченного сингулярного разложения. В первом случае был найден псевдообратный оператор $A^+ = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1}$.

Алгоритм обращения матрицы посредством усеченного сингулярного разложения состоит в следующем. Пусть матрица исходных данных A представлена в виде $A = U\Lambda V^T$. Тогда при нахождении обратной матрицы $A^+ = V\Lambda^{-1}U^T$ в силу ортогональности матриц U и V: $U^T U = VV^T = I$ и в силу условия убывания диагональных элементов матрицы $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, псевдообратная матрица A^+ более зависит от тех элементов матрицы Λ, которые имеют меньшие значения, чем от первых сингулярных чисел. Действительно, если по условию теоремы о сингулярном разложении матрица A имеет сингулярные числа $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$, то сингулярные числа матрицы A^+ равны

[14] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — С. 110.

$\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n})$ и $\frac{1}{\lambda_1} \leqslant \frac{1}{\lambda_2} ... \leqslant \frac{1}{\lambda_n}$. Считая первые r сингулярных чисел определяющими собственное пространство матрицы A, при обращении матрицы A использовались первые r сингулярных чисел. Обратная матрица A^+ найдена как $A^+ = V\Lambda_r^{-1}U^T$.

Для обоснования предложенных методов согласования использовалась лемма о непрерывности обратного отображения, впервые сформулированная А. Н. Тихоновым.

Тройка $(\mathbf{q}, \mathbf{w}, A)$ определена на следующих метрических пространствах. Вектор $\mathbf{q}$ является элементом Q, где область Q является компактной в $\mathbb{Q}$: $Q \subset \mathbb{Q} \equiv \mathbb{R}^m$, так как область Q замкнута и ограничена. Также, вектор $\mathbf{w}$ является элементом W, где область W является компактной в $\mathbb{W}$: $W \subset \mathbb{W} \equiv \mathbb{R}^n$, так как область W замкнута и ограничена. Метрика задается нормами векторов $\|\mathbf{q}\|^2$ для компакта Q и $\|\mathbf{w}\|^2$ для компакта W. Функционал $\rho_{\mathbb{Q}} = \rho_{\mathbb{Q}}(A\mathbf{w}, \mathbf{q})$ определен как $\rho_{\mathbb{Q}} = \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}\|^2$.

Теорема 7. *Псевдообратный оператор A^+, определенный как $A^+ = (A^TA + \gamma^2 I)^{-1}$, является непрерывным по метрике пространства $\mathbb{W}$.*

Теорема 8. *Оператор $A^+ = U^T\Lambda_r V$, полученный методом обращения усеченного сингулярного разложения, является непрерывным в r-мерном подпространстве.*

Так как оператор A в уравнении $A\mathbf{w} = \mathbf{q}$ вполне непрерывный, то построение устойчивого к малым изменениям правой части $\mathbf{q}$ приближенного решения этого уравнения по формуле $\mathbf{q} = A^+\mathbf{w}$ возможно в тех случаях, когда решение ищется на компакте $W \subset \mathbb{W}$ и правая часть уравнения принадлежит множеству AW.

Показано, что согласованные векторы $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}$, получаемые с помощью процедур согласования, являются единственными.

Задача нахождения тройки $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$ называется корректно поставленной на паре метрических пространств $(\mathbb{Q}, \mathbb{W})$, если удовлетворяются условия:

1. для всякого элемента $\hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{Q}$ существует решение $\hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{W}$;

2. решение определяется однозначно;

3. задача устойчива на пространствах $\mathbb{Q}, \mathbb{W}$.

Таким образом, получены решения задач (6) и (10), корректные по Адамару.

В третьем разделе приведены результаты построения индикаторов и описана библиотека функций, необходимых для вычислений.

Для решения задачи по оценке эффективности управления заповедниками были собраны следующие данные:

— ежегодные отчеты заповедников за 1995-2000 гг.,

— экспертные оценки интегральных индикаторов заповедников,

— экспертные оценки весов показателей ежегодных отчетов,

— мнения экспертов относительно классификации заповедников,

Для оценки эффективности управления заповедниками экспертам был предложен специально составленный сборник анкет[15]. В данном сборнике экспертам предлагалось дать оценку эффективности работы заповедника по различным критериям (охрана, наука, просвещение, работа директора), а также сравнить заповедники друг с другом. Помимо этого, экспертам предлагалось сделать самооценку осведомленности о работе заповедника.

В данной работе, в качестве иллюстративного примера выбраны данные ежегодных отчетов по разделу "Работа службы охраны заповедников Российской Федерации". Предлагаемые процедуры были применены к выбранным данным, результаты обработки данных описаны ниже.

В качестве исходных данных рассмотрена матрица A, включающая в себя 23 заповедника, указанных экспертами. Число обусловленности матрицы A равно $æ_A = 2700$. При нахождении интегрального индикатора "без учителя" к матрице исходных данных применялись три процедуры нахождения интегральных индикаторов — вычисление нормы в метрике

[15] IUCN-CIDA-WWF. Экспертно-статистический метод оценки эффективности работы ООПТ. Сборник анкет. Рукопись. — М.:IUCN, 2001 — 18 с.

Минковского, метод главных компонент и метод сингулярного разложения. Вычисленные индикаторы $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, $\mathbf{q}_2 = \bar{A}\mathbf{c}_{\cdot 1}$ и $\mathbf{q}_3 = U\lambda_1$ слабо коррелирует с интегральным индикатором $\mathbf{q}_0$, предполагаемом экспертами: $r_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_0} = -0.15$, $r_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_0} = -0.14$, $r_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_0} = -0.34$.

Таким образом, для того чтобы получить удовлетворительные для экспертов результаты, минимально противоречащие экспертным оценкам и исходным данным, требовалось выполнить процедуру согласования экспертных оценок.

Были использованы два метода согласования, давшие примерно одинаковые оценки интегральных индикаторов, которые эксперты сочли удовлетворительными. Параметры доверия α и γ^2 решено было назначить исходя из условия (7). В данном случае $\alpha = 0.32575$, $\gamma^2 = 0.93376$. При минимальном значении параметра α, близки исходная оценка индикатора $\mathbf{q_0}$ и согласованная оценка $\mathbf{q}_\alpha$. При максимальном значении параметра α, близки исходная оценка весов показателей $\mathbf{w_0}$ и согласованная оценка $\mathbf{w}_\alpha$. При некотором значении α расстояния от обоих согласованных векторов до соответствующих им исходных векторов становятся одинаковы: $\frac{\varepsilon^2}{m-1} = \frac{\delta^2}{n-1}$. Изменение расстояний ε^2, δ^2 при выборе параметра $\alpha \in [0, 1]$ можно увидеть на рис. 1. Здесь по оси абсцисс отложено значение α, а по оси ординат значения ε, δ. При увеличении α расстояние ε между векторами $\mathbf{q_0}$ и $\mathbf{q}_\alpha$ увеличивается, а расстояние δ между векторами $\mathbf{w_0}$ и $\mathbf{w}_\alpha$ уменьшается.

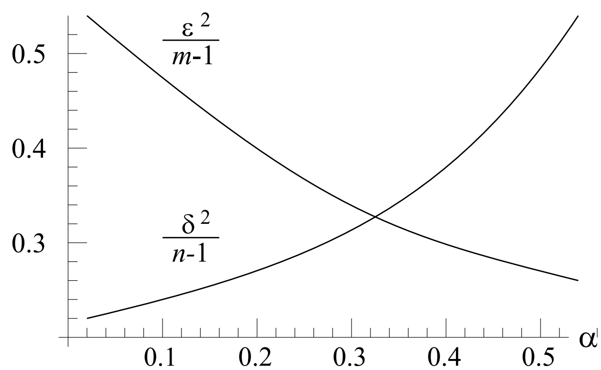

Рис. 1: Зависимость расстояний ε и δ от параметра α

К рассматриваемым экспертным оценкам была применена процедура τ-согласования. Процедура отображает векторы экспертных оценок $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ соответственно в такие векторы $\mathbf{q}_\tau$ и $\mathbf{w}_\tau$, которые минимизируют невязку $\|\Delta\|^2$ уравнения $A(T_w(\mathbf{w}_0)) = T_q(\mathbf{q}_0) + \Delta$.

Результаты работы процедуры τ-согласования использовались в качестве входной тройки для процедуры γ^2-согласования с целью получения согласованных экспертных оценок. Для оценки работ различных процедур согласования было использовано полученное расстояние от векторов экспертных оценок до согласованных векторов. Результаты сравнения работ алгоритмов показаны в таблице 1. Как видно из вышеприведенной таблицы, расстояние $\frac{\varepsilon^2}{m-1}+\frac{\delta^2}{n-1}$, полученное с помощью процедуры γ^2-согласования меньше, чем расстояние, полученное с помощью процедуры α-согласования, так как во втором случае согласованные векторы $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ принадлежали соответственно отрезкам $[\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$ и $[\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1]$, а в первом случае согласованные векторы $\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma$ лежали в окрестности соответственно векторов $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{w}_0$. Композиция процедур τ-согласования и γ^2-согласования дала еще меньшее суммарное расстояние $\frac{\varepsilon^2}{m-1}+\frac{\delta^2}{n-1}$.

Процедура	$\frac{\varepsilon^2}{m-1}+\frac{\delta^2}{n-1}$
α-согласование	0.67
γ^2-согласование	0.62
τ-γ^2-согласование	0.59

Таблица 1: Расстояние между векторами экспертных оценок и согласованными векторами

Так как обе описанных процедуры — α-согласования и γ^2-согласования дали близкие результаты, первая процедура была рекомендована в том случае, когда параметр согласования назначают сами эксперты. В том случае, когда требуется найти минимальное суммарное расстояние рекомендовалась процедура γ^2-согласования.

В обсуждении указаны особенности применения процедур построения и согласования интегральных индикаторов, и описаны области применения этих процедур.

Заключение содержит основные результаты диссертации, а также список публикаций по теме исследования.

1. Введен оператор согласования экспертных оценок. Предложены процедуры согласования экспертных оценок для линейных и ранговых шкал.

2. Предложена процедура регуляризации оператора, отображающего пространство весов показателей в пространство интегральных ин-

дикаторов, и доказана его устойчивость.

3. Рассмотрены известные процедуры получения интегрального индикатора множества объектов "без учителя". Развита процедура, разделяющая множество объектов на кластеры.

4. Создано программное обеспечение для построения интегральных индикаторов и согласования экспертных оценок.

5. Методы проиллюстрированы задачей по оценке эффективности работы заповедников России. Использовались данные ежегодных отчетов о работе службы охраны заповедников и экспертные оценки интегральных индикаторов и весов показателей работы заповедников. В качестве результата получены согласованные интегральные индикаторы и веса показателей.

Публикации по теме работы

1. Стрижов В. В. Согласование экспертных оценок для биосистем в экстремальных условиях. Сообщения по прикладной математике. Научное издание. — М.: ВЦ РАН 2002. — 41 с.

2. Стрижов В. В., Шакин В. В. Согласование экспертных оценок в ранговых шкалах. /Математика. Компьютер. Образование. IX международная конференция. Тезисы докладов. — М.: "Прогресс-Традиция", 2002. — С. 148.

3. Стрижов В. В., Шакин В. В. Согласование экспертных оценок. /Математические методы распознавания образов (ММРО-10), Доклады X всероссийской конференции. Научное издание. — РАН, ВЦ, РФФИ, Москва, 2001. — с. 137-138.

4. Стрижов В. В., Шакин В. В., Благовидов В. В. Согласование экспертных оценок при анализе эффективности управления заповедниками. /Тезисы докладов "Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества." — Москва, 2001. — С. 30.

5. Molak V, Shakin V. Strijov V., Kyoto Index for the Power Plants in the USA. The 3-rd Moscow International Conference On Operations Research (ORM2001). Abstracts. — Вычислительный центр РАН, Москва, 2001 — P. 80.

6. Strijov V., Shakin V., An algorithm for clustering of the phase trajectory of a dynamic system. — Mathematical Communications — Supplement 1(2001) — p. 159-165.

7. Зубаревич Н. В., Тикунов В. С., Крепец В. В., Стрижов В. В., Шакин В. В. Многовариантные методы интегральной оценки развития человеческого потенциала в регионах Российской Федерации. /в сб. ГИС для устойчивого развития территорий. Материалы Международной конференции. — Петропавловск-Камчатский, 2001. — с. 84-105.

8. Стрижов В. В., Шакин В. В. Программное обеспечение для исследования фазовых траекторий. /Математические методы распознавания образов (ММРО-9), Доклады IX всероссийской конференции. Научное издание. — РАН, ВЦ, РФФИ, Москва, 1999. — с. 227-230.