

Российская академия наук
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына

На правах рукописи

В. В. Стрижов

**СОГЛАСОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК
ПРИ ПОСТРОЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ИНДИКАТОРОВ**

05.13.11 — математическое и программное обеспечение
вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей

диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

научный руководитель: к. ф.-м. н. В. В. Шакин

Москва — 2002

Содержание

Введение	4
1 Построение интегральных индикаторов	12
1.1 Модель порождения данных	13
1.2 Нахождение интегрального индикатора “без учителя”	17
1.2.1 Нахождение расстояния	18
1.2.2 Метод главных компонент	18
1.2.3 Сингулярное разложение	20
1.2.4 Расслоение Парето	23
1.3 Кластеризация объектов при построении индикаторов	25
2 Согласование экспертных оценок	30
2.1 Постановка задачи согласования экспертных оценок	30
2.2 Согласование в линейных шкалах	32
2.2.1 α -согласование	32
2.2.2 γ^2 -согласование	37
2.3 Согласование в ранговых шкалах	39
2.3.1 τ -согласование	39
2.3.2 Нахождение корректирующей функции T	41
2.3.3 Описание алгоритма τ -согласования	42
2.4 Регуляризация при нахождении согласованных оценок	44
3 Результаты	49
3.1 Описание библиотеки функций	49
3.2 Модель управления заповедниками	53
3.3 Описание исходных данных	60
3.4 Получение экспертных оценок	63

3.5	Предварительный анализ и кластеризация	68
3.6	Нахождение интегрального индикатора “без учителя”	72
3.7	Согласование экспертных оценок	75
4	Обсуждение	87
5	Заключение	90
	Список литературы	94
	Список условных обозначений	102
	Список таблиц	104
	Список иллюстраций	105

Введение

Актуальность проблемы. Важной задачей анализа данных, требующей количественных методов оценки, является задача согласования экспертных оценок при построении интегральных индикаторов. Её решение нужно для объективного суждения в спорте, анализа состояния социальных, экономических, экологических систем и для многих других предметных областей. Этой задаче посвящено много работ как зарубежных, так и отечественных исследователей.

Содержательное основание диссертации составляют работы в области снижения размерности признакового пространства и экспертно-статистический метод. В этой области работали С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин и В. В. Шакин. Термин “экспертно-статистический метод” впервые был введен в 1974 году С. А. Айвазяном. В работе [3] он писал: “Пытаясь оценить (в целом) эффективность деятельности отдельного специалиста, подразделения или предприятия, проранжировать страны по некоторому интегральному качеству (например, по качеству жизни населения или по так называемому общему индексу человеческого развития), наконец, проставить балльные оценки спортсмену — участнику командных соревнований в игровых видах спорта за качество его игры в определенном цикле, мы каждый раз по существу решаем (на интуитивном уровне) одну и ту же задачу: отправляясь в своем анализе от набора частных показателей $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$, каждый из которых может быть измерен и характеризует какую-нибудь одну частную сторону понятия “эффективность”, мы их как бы взвешиваем (т. е. внутренне оцениваем удельный вес их влияния на общее, агрегированное, понятие эффективности) и выходим на некоторый скалярный агрегированный показатель эффективности y .” Таким образом, было предложено построить интегральный индикатор множества объектов в виде линейной комбинации показателей объектов.

Некоторые способы построения интегрального индикатора были предложены

ны в справочном издании по прикладной статистике [1]. В разделе “Снижение размерности признакового пространства и отбор наиболее информативных показателей” были предложены такие методы как метод главных компонент, использовавшийся в данной работе для предварительного построения интегрального индикатора, факторный анализ, метод экстремальной группировки признаков, многомерное шкалирование, отбор наиболее информативных показателей в моделях дискриминантного анализа, отбор наиболее информативных переменных в моделях регрессии и другие.

С другой стороны, в 1972 году В. В. Шакиным в работе [50] был предложен метод объективизации работы жюри. Основная идея этого метода заключалась в двойственности экспертной оценки, когда эксперты могли оценивать как веса измеряемых показателей, так и ценность объектов. В настоящей работе на основе этого метода был развит метод согласования оценок, полученных непосредственно от экспертов и вычисленных оценок.

Ряд работ [14], [28] по упорядочиванию объектов был опубликован И. Ф. Шахновым и его соавторами. В этих работах были поставлены задачи ранжирования объектов, описанных с помощью матриц парных предпочтений и нечетких отношений второго типа, определяемых матрицами лингвистических парных оценок. Для решения этих задач предложен ряд методов, не использующих описание объектов с помощью измеряемых показателей. Рассмотренные экспертные оценки выставлялись в ранговых шкалах или были лингвистическими.

Аналитическое основание составляют работы по сингулярному разложению и регуляризации линейных операторов. Использовались в частности работы Дж. Форсайта и К. Молера по численному решению систем линейных алгебраических уравнений [57], в которых было описано сингулярное разложение и доказаны необходимые теоремы. В работе Дж. Голуба и Ч. Ван Лоуна введено понятие оператора, псевдообратного данному линейному.

Понятие регуляризации введено А. Н. Тихоновым в работах по решению некорректно поставленных задач, в частности в [45]. Показано, что задача называется корректно поставленной на паре метрических пространств (\mathbb{Q}, \mathbb{W}) , если удовлетворяются три условия. Во-первых, для всякого элемента $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}$ существует решение $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$, во-вторых, решение определяется однозначно, и в третьих, задача устойчива на пространствах \mathbb{Q}, \mathbb{W} .

В работе А. М. Шурыгина по робастности в прикладной стохастике [55] предложены методы получения стойкой регрессии при наличии загрязняющих элементов в выборке. Они заключаются в использовании первых главных компонент матрицы данных. Идеи метода стойкой регрессии использовались при нахождении согласованной экспертной оценки в пространствах с конусом.

В работе П. К. Хансена [61] изложены проблемы регуляризации при решении систем вырожденных уравнений. В этой работе рассматриваются как методы регуляризации А. Н. Тихонова, так и регуляризация при помощи сингулярного разложения. Введено понятие обобщенного сингулярного разложения для решения некорректно поставленных задач.

Термин “согласование экспертных оценок” был введен в работах Б. Р. Литвака, см. например, [24]. В данной работе были описаны методы согласования экспертных оценок для случаев, когда измеряемые данные при построении обобщенной согласованной оценки не рассматривались. Описаны несколько методов согласования экспертных оценок для групп экспертов. Методы основаны на последовательном изменении экспертами своих оценок. В частности, описан метод согласования экспертных оценок “Дельфи”. Также термин “согласование экспертных оценок” использовал А. И. Орлов в обзоре “Современный этап развития теории экспертных оценок” [32]. Он подчеркивал важность обоснования модели построения интегральных индикаторов, в которой используются экспертные оценки: “В некоторых случаях всё-таки можно глобально сравнить объекты — на-

пример, с помощью тех же экспертов получить упорядочение рассматриваемых объектов — изделий или проектов. Тогда можно *подобрать* коэффициенты при отдельных показателях так, чтобы упорядочение с помощью линейной функции возможно точнее соответствовало глобальному упорядочению.” Тем не менее, следует точно определить, в какой шкале эксперты могут выставить свои оценки: “Наоборот, в подобных случаях *не следует* оценивать указанные коэффициенты с помощью экспертов. Эта простая идея до сих пор не стала очевидной для отдельных составителей методик по проведению экспертных опросов и анализу их результатов. Они упорно стараются заставить экспертов делать то, что они выполнить не в состоянии — указывать веса, с которыми отдельные показатели качества должны входить в итоговый обобщенный показатель. Эксперты обычно могут сравнить объекты или проекты в целом, но не могут вычленить вклад отдельных факторов. Раз организаторы опроса спрашивают, эксперты отвечают, но эти ответы не несут в себе надежной информации о реальности.”

В данной работе описано три подхода к построению интегрального индикатора. Первый и второй подходы — построение интегрального индикатора “без учителя” и построение интегрального индикатора строился “с учителем”, как взвешенная сумма измерений показателей каждого объекта.

Предлагаемый подход имеет целью согласовать экспертные оценки и заключается в поиске компромиссного решения. Согласно этому подходу, экспертам предоставляется возможность разрешить противоречие между интегральными индикаторами объектов, весами показателей и измеряемыми данными.

Для построения интегральных индикаторов необходимы как экспертные оценки качества объектов, так и объективные, измеряемые показатели — описания объектов. Роль экспертной оценке в данной работе очень велика. Эксперт устанавливает критерий, по которому оценивается объект, определяет множество сопоставимых по данному критерию объектов и выставляет оценки каждому объ-

екту.

Предполагается, что эксперт имеет собственное мнение, не навязанное общественным мнением и не построенное только на основании измеряемых данных. Это мнение базируется на личном опыте и на знаниях, приобретенных в процессе работы. Свое мнение эксперт отражают в специально подготовленных анкетах и в комментариях к этим анкетам. Все анкеты составляются таким образом, чтобы дать эксперту наибольшую свободу в высказываниях.

Интегральные индикаторы объектов в данной работе строились следующим образом. На основании измеряемых данных, для описания m объектов $\Upsilon = \{v_i\}_{i=1}^m$ было построено множество из n базовых показателей $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^n$. Каждому показателю соответствует столбец, а каждому объекту соответствует строка в матрице исходных данных $A = \{a_{ij} : a_{ij} \in \mathbb{R}^1\}_{i,j=1}^{m,n}$. Для получения экспертных оценок каждому показателю ψ_j поставлен в соответствие вес w_j , а каждому объекту v_i поставлен в соответствие интегральный индикатор q_i . Эксперт оценивал веса базовых показателей и интегральные индикаторы объектов. Для этого эксперту был предложен специально подготовленный набор анкет [62], [59]. В результате оценки были получены множество весов $\mathbf{w}_0 = \{w_j : w_j \in \mathbb{R}\}_{j=1}^n$ и множество интегральных индикаторов $\mathbf{q}_0 = \{q_i : q_i \in \mathbb{R}\}_{i=1}^m$.

После этого была проведена процедура согласования экспертных оценок. Результаты этой процедуры — согласованные интегральный индикатор $\hat{\mathbf{q}}$ и веса показателей $\hat{\mathbf{w}}$ были опубликованы для дальнейшего обсуждения. При необходимости эксперт мог скорректировать свои оценки. Тогда процедура согласования повторялась.

Цели и задачи работы. Теоретическая цель настоящей работы — развитие методов построения интегральных индикаторов, основанных как на информации об анализируемых объектах, так и на экспертных оценках. Практической целью работы является создание программного обеспечения для построения ин-

тегральных индикаторов и согласования экспертных оценок.

Методы исследования, материалы. Методологической основой для выполнения настоящей работы послужили современные исследования в теории принятия решений. Использовались, в частности, работы В. В. Шакина [50], [51] по измерению связи между качественными признаками и работы С. А. Айвазяна [1], [2] по построению интегральных индикаторов, методы регуляризации при решении некорректно поставленных задач, методы кластеризации. В работе использовались данные и экспертные оценки, предоставленные Департаментом охраны окружающей среды и экологической безопасности МПР России в рамках проекта Глобального экологического фонда (ГЭФ) “Сохранение биоразнообразия”. Для тестирования предложенных процедур использовались данные Государственного Комитета РФ по Статистике по разделу “Окружающая среда”.

Обоснованность научных положений. Теоретические положения диссертации, сформулированные в виде теорем и более частных утверждений, строго доказаны. Выводы, сделанные в предметной области, одобрены экспертами Представительства Всемирного союза охраны природы для стран СНГ.

Научная новизна.

1. Введен оператор согласования экспертных оценок.
2. Предложены процедуры согласования экспертных оценок для линейных и ранговых шкал.
3. Предложена процедура регуляризации оператора, отображающего пространство весов показателей в пространство интегральных индикаторов, и доказана его устойчивость.
4. Создано программное обеспечение для построения интегральных индикаторов и согласования экспертных оценок.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные процедуры нахождения интегрального индикатора могут использоваться в задачах принятия решения, для согласования экспертных оценок состояния объектов, построения экологических и социальных индикаторов, а также индикаторов качества, таких как интегральный индикатор качества жизни, индекс развития человеческого потенциала.

Апробация работы. Работа поддержана грантом РФФИ 00-01-00197 “Критерии качества жизни и устойчивого развития для социально-экономических систем в экстремальных условиях”.

Работа выполнена в рамках реализации проекта ГЭФ “Сохранение биологического разнообразия России” и программы Представительства ВСОП для стран СНГ по экологическим сетям и охраняемым природным территориям. Предложенная в данной работе модель протестирована на данных — результатах мониторинга заповедников РФ за 1996-2000 годы.

Материалы диссертации докладывались на Всероссийской конференции “Математические методы распознавания образов” — ММРО-10, Москва, 19-22 ноября 2001 г. и ММРО-9, Москва, 15-19 ноября 1999 г.; Научном семинаре “Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов” — Москва, Центральный экономико-математический институт РАН, 17 апреля 2002 г. и 28 марта 2001 г.; 8-й международной конференции “Исследование операций — КОИ-2000” — Ровинь, Хорватия, 27-29 сентября 2000 г.

Созданное в рамках данной работы программное обеспечение и методики используются компанией GAIA UNLIMITED, Inc., USA для оценки влияния работы электростанций на качество окружающей среды и Представительством ВСОП для стран СНГ для оценки эффективности управления государственными заповедниками России. По теме диссертации опубликовано 8 работ.

Структура диссертации. Во введении описана актуальность и цели работы. Приведен обзор литературы, посвященной данной тематике. В первом разделе описаны известные способы нахождения интегрального индикатора без обучающей выборки. Во втором разделе описаны предложенные процедуры согласования экспертных оценок и регуляризации оператора, отображающего вектор из пространства экспертных оценок весов показателей в пространство интегральных индикаторов. В третьем разделе описана предложенная модель управления с обратной связью, в рамках которой оценивается эффективность работы заповедников и описаны результаты вычисления интегрального индикатора с использованием данных ежегодных отчетов заповедников и экспертных оценок. Четвертый раздел посвящен обсуждению процедур нахождения интегральных индикаторов и полученных результатов. В заключении подведены итоги работы по оценке эффективности управления заповедниками. Диссертация содержит 105 страниц машинописного текста, 16 рисунков, 7 таблиц. Список литературы включает 64 наименования.

1 Построение интегральных индикаторов

Интегральный индикатор — свертка данных, которая наиболее информативно описывает объект в признаковом пространстве [4]. Для вычисления значений интегрального индикатора ранее были предложены методы как с участием, так и без участия экспертов [50], [2].

Были применены три подхода построения интегрального индикатора. Согласно первому подходу [3] был получен интегральный индикатор “без учителя”, как проекция вектора описаний каждого объекта на первую главную компоненту матрицы данных, раздел 1.2.2. Полученный результат, по мнению экспертов, оказался неудовлетворительным. Согласно второму подходу [3] интегральный индикатор строился “с учителем” как взвешенная сумма измерений показателей объекта, см. раздел 1.2.1. Очевидно [32], веса назначались неверно, что также приводило к результатам, спорным с точки зрения экспертов. Предлагаемый третий подход имеет целью согласовать экспертные оценки и заключается в поиске компромиссного решения. Согласно этому подходу экспертам предоставляется возможность разрешить противоречие между интегральными индикаторами, весами показателей и измеряемыми данными.

Результат работы одного эксперта есть тройка $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$. Для нахождения интегрального индикатора предлагается согласовать оба множества экспертных оценок \mathbf{q}_0 и \mathbf{w}_0 с помощью матрицы данных A . Для этого вводится оператор согласования экспертных оценок Φ . Он переводит тройку $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ в тройку $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$ так, что для любых $\hat{\mathbf{q}} \in Q$ и $\hat{\mathbf{w}} \in W$ выполняется условие

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}} = A\hat{\mathbf{w}}, \\ \hat{\mathbf{w}} = A^+\hat{\mathbf{q}}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Где A^+ — оператор, псевдообратный A .

В разделе 1.2 рассмотрены первые два подхода построения интегральных

индикаторов, в разделе 2 рассмотрен третий подход.

1.1 Модель порождения данных

Задано множество $\Upsilon = \{v_1, \dots, v_m\}$ объектов и множество показателей $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Произвольный объект v_i описывается с помощью вектора-строки $\mathbf{a}_i = \langle a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in} \rangle : \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$. Множество измерений представляется в виде матрицы исходных данных, обозначаемой $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ в пространстве действительных чисел: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Элемент a_{ij} — значение j -го показателя ψ_j для i -го объекта v_i : $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Всего в матрице описывается m объектов, измеряемых по n показателям. Векторы-столбцы $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ матрицы A содержат измерения j -го показателя для всех измеряемых объектов.

Для удовлетворения условию сопоставимости интегральных индикаторов различных объектов при нормировании базовых показателей устанавливают максимально возможное и минимально возможное значение каждого показателя для всего множества объектов и назначают оптимальное значение данного показателя. Таким образом, возможно объявить наилучшим тот объект, у которого все показатели имеют оптимальное значение и худшим тот объект, у которого все показатели имеют наихудшие значения. После нормирования показатели всех остальных объектов будут располагаться между наилучшими и наихудшими значениями соответствующих показателей наилучшего и наихудшего объектов. Соответственно, интегральные индикаторы всех объектов будут располагаться на шкале между интегральными индикаторами наилучшего и наихудшего объектов, что даст возможность сравнить объекты друг с другом.

Определение 1.1. *Объект v_i , имеющий максимальный по значению интегральный индикатор (наибольшую экспертную оценку, если она рассматривается в качестве интегрального индикатора) $q_i = \max\{q_1, \dots, q_m\}$ считается наилучшим. Объект v_i , имеющий минимальный по значению интегральный ин-*

дикатор $q_i = \min\{q_1, \dots, q_m\}$ считается наилучшим.

Определение 1.2. Показатель ψ_j , имеющий максимальный по значению вес (наибольшую экспертную оценку, если она рассматривается в качестве веса показателя) $w_j = \max\{w_1, \dots, w_n\}$ считается наиважнейшим при нахождении интегрального индикатора.

Предполагается, что выполнены следующие начальные условия, общие для всех рассматриваемых в данной работе процедур:

1. Максимальное значение элемента $a_{\xi\zeta}$ измеряемого показателя ψ_ζ с номером ζ означает, что ξ -й объект v_ξ является наилучшим по данному показателю. Также минимальное значение элемента $a_{\xi\zeta}$ показателя ψ_ζ означает, что объект v_ξ является наихудшим по данному показателю. То есть, для данного показателя ψ_ζ

$$\begin{aligned} a_{\xi\zeta} = \max\{a_{i\zeta}\}, i = 1, \dots, m &\Rightarrow q_\xi = \max\{q_1, \dots, q_m\}, \\ a_{\eta\vartheta} = \min\{a_{i\vartheta}\}, i = 1, \dots, m &\Rightarrow q_\eta = \min\{q_1, \dots, q_m\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. Матрица исходных данных A не имеет пропущенных значений:

$$\forall a_{ij} \in A, a_{ij} \neq Null. \quad (1.3)$$

В данной работе использовались следующие способы представления исходных данных:

- (а) Матрица абсолютных значений или матрица измерений m объектов в n -мерном пространстве показателей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}^1$, \mathbf{a}_i — i -й вектор, описывающий произвольный объект в n -мерном пространстве показателей. Как частный случай рассматривалась матрица, состоящая из элементов $a_{ij} \in \mathbb{Z}^1$ — принадлежащих пространству порядковых шкал.

(b) Матрица парных расстояний $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,m}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}^1$; $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ii} = 0$.

Элемент a_{ij} — расстояние от i -го до j -го объекта. Как частный случай рассматривалась матрица парных предпочтений $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,m}$, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Элемент $a_{ij} \in \mathbb{R}^1$ — степень предпочтения i -го объекта j -му. Например,

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{если } i\text{-й объект более предпочтителен, чем } j\text{-й;} \\ a_{ij} = -1, & \text{если } j\text{-й объект более предпочтителен, чем } i\text{-й;} \\ a_{ij} = 0, & \text{если предпочтение не определено.} \end{cases}$$

Везде, где это специально не оговаривается, мы будем считать, что имеем дело с матрицей абсолютных значений.

В качестве дополнительных условий некоторые методы получения интегральных индикаторов требуют, чтобы исходные данные были нормированы и центрированы. Для выполнения этих условий эксперты каждому показателю ставят в соответствие элемент a_j^{opt} вектора оптимальных значений \mathbf{a}_j^{opt} . Он может принимать одно из следующих значений: $a_j^{opt} = \min(\mathbf{a}_j)$, если меньшему значению данного показателя соответствует лучший, с точки зрения эксперта, объект; $a_j^{opt} = \max(\mathbf{a}_j)$, если лучший объект соответствует большему значению данного показателя; либо $a_j^{opt} \in \mathbb{R}^1$ — оптимальное значение для данного показателя назначается специально.

Определение 1.3. Нормированием матрицы A по столбцам называется отображение элементов вектора \mathbf{a}_j в соответствующие элементы вектора $\bar{\mathbf{a}}_j$, определяемое линейным отображением отрезка $[\min(\mathbf{a}_j), \max(\mathbf{a}_j)]$ в отрезок $[0, 1]$.

В том случае, когда исходные данные не соответствуют требованиям определения 1.1, вводится дополнительное отображение такое, что оптимальному значению $opt(\mathbf{a}_j) : \min(\mathbf{a}_j) < opt(\mathbf{a}_j) < \max(\mathbf{a}_j)$ ставится в соответствие единица из отрезка $[0, 1]$, а минимальному и максимальному значениям вектора \mathbf{a}_j ставится в соответствие ноль из отрезка $[0, 1]$.

Как указано в [2], в общем случае, когда задано значение оптимального вектора, элементы нормированной матрицы находятся по формуле

$$\bar{a}_{ij} = 1 - \frac{|a_{ij} - a_j^{opt}|}{\max([a_j^{opt} - \min(\mathbf{a}_j)], [\max(\mathbf{a}_j) - a_j^{opt}])}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Определение 1.4. Центрированием матрицы по столбцам называется отображение вектора \mathbf{a}_j матрицы A в вектор $\tilde{\mathbf{a}}_j$ при $j = 1, \dots, n$ такое, что среднее арифметическое значение всех элементов вектора $\tilde{\mathbf{a}}_j = \langle \tilde{a}_{ji} \rangle_{i=1}^m$ равняется нулю.

Значения элементов центрированной матрицы исходных данных \tilde{A} находятся по формуле, предложенной в [2]:

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

Еще одним дополнительным условием является требование к размерности матрицы: количество показателей не должно превосходить количество объектов,

$$n \leq m. \quad (1.6)$$

Описанные ниже процедуры построения вектора интегральных индикаторов “без учителя” предполагают, что матрица исходных данных подготовлена следующим образом, см. таблицу 1.

Процедура построения ИП/Условие	(1.4)	(1.5)	(1.6)
по расстоянию	+	—	—
по первой главной компоненте	+	+	—
по сингулярному разложению	+	—	—
по расслоению Парето	—	—	—

Таблица 1: Требования, предъявляемые к матрице исходных данных при выполнении различных процедур нахождения интегрального индикатора

Знак “+” в таблице означает, что для указанной процедуры построения интегрального индикатора элементы a_{ij} матрицы A удовлетворяют требованиям нормировки (1.4), центрирования (1.5), размерности (1.6).

1.2 Нахождение интегрального индикатора “без учителя”

Для нахождения интегральных индикаторов “без учителя” использовались метод главных компонент, метод сингулярных компонент и расслоение Парето. Использовалась также взвешенная сумма $\mathbf{q} = A\mathbf{w}_0$, где веса $\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, \dots, w_{0n} \rangle^T : \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$ назначались экспертами.

Определение 1.5. *Интегральным индикатором объекта $v_i \in \Upsilon$ с номером i называется скаляр $q_i \in \mathbb{R}^1$, поставленный в соответствие набору \mathbf{a}_i описаний объекта.*

При рассмотрении множества объектов Υ вектор $\mathbf{q} = \langle q_1, \dots, q_m \rangle^T : \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ считался интегральным индикатором множества объектов, описанных матрицей $A = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^m : A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Основная идея методов нахождения интегрального индикатора “без учителя” заключается в том, что наилучшим считается i -й объект с максимальными значениями показателей (обозначим ее “*tbtb*” — the bigger the better). Объект с наибольшим интегральным индикатором при выполнении условия (1.4) имеет значения показателей $\bar{\mathbf{a}}_i = \{1, 1, \dots, 1\}$. Сильная сторона данной идеи в ее простоте и универсальности. Слабая сторона идеи заключается в том, что она предполагает определенную линейную зависимость между столбцами матрицы A . Например, оценивая объекты, которым соответствует матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{2,m}$ при коэффициенте корреляции между ее столбцами $r_{1,2} = -1$, эксперт, который ориентируется на гипотезу “*tbtb*”, скажет, что данные противоречивы.

1.2.1 Нахождение расстояния

При нахождении интегрального индикатора с помощью данной процедуры вычисляется расстояние от вектора-столбца $\bar{\mathbf{a}}_i$, описывающего каждый объект

1. до наихудшего объекта с показателями, принимающими значение $\bar{\mathbf{a}}_i = \{0, 0, \dots, 0\}$,

$$q_i = \sqrt[k]{\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}^k}; \quad (1.7)$$

2. до наилучшего объекта с показателями, принимающими значение $\bar{\mathbf{a}}_i = \{1, 1, \dots, 1\}$, при соблюдении условия (1.4)

$$q_i = \sqrt[k]{\sum_{j=1}^n (1 - \bar{a}_{ij})^k}. \quad (1.8)$$

При значении $k = 1, 2$ расстояния вычислены соответственно в манхэттенской и евклидовой метрике. При $k \geq 3$ расстояние (1.7) называется расстоянием Минковского.

В данной работе для нахождения интегральных индикаторов использовалась взвешенная сумма

$$\mathbf{q} = \bar{A}\mathbf{w}_0, \quad (1.9)$$

где веса \mathbf{w}_0 назначались экспертами, см. таблицу 5.

1.2.2 Метод главных компонент

Для нахождения первой главной компоненты [1] нормированной (1.4) и затем центрированной (1.5) матрицы \tilde{A} необходимо найти такие коэффициенты $C = \{c_{ij}\}_{i,j}^{n,n}$, что линейные комбинации векторов

$$\mathbf{z}_i = \tilde{A}\mathbf{c}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

обладали бы наибольшей дисперсией, то есть

$$\max \left(\frac{D\mathbf{z}_1 + D\mathbf{z}_2 + \dots + D\mathbf{z}_n}{D\tilde{\mathbf{a}}_1 + D\tilde{\mathbf{a}}_2 + \dots + D\tilde{\mathbf{a}}_n} \right)$$

при ограничениях нормировки $\sum_{i=1}^m c_{ij}^2 = 1, j = 1, \dots, n$ и $\sum_{i=1}^m c_{ij}c_{ik} = 0, j, k = 1, \dots, n, j \neq k$. Здесь D — знак операции вычисления дисперсии соответствующей случайной величины

$$D\mathbf{a}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_{ij} - \check{a}_{.j})^2,$$

где $\check{a}_{.j}$ — среднее арифметическое значение вектора-столбца.

Процедура нахождения главных компонент (см. [2]) заключается в следующем:

1. Задается ковариационная матрица $\Sigma = \{\sigma_{jk}\}_{j,k=1}^{n,n}$, элементы которой находятся по формуле

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_{ij} - \check{a}_{.j})(a_{ik} - \check{a}_{.k}). \quad (1.10)$$

2. Определяется наибольшее собственное значение λ_1 матрицы Σ , как наибольший по величине корень характеристического уравнения $|\Sigma - \lambda I_n| = 0$. Алгоритм нахождения собственных значений матриц описан в [64].
3. Решая уравнение $(\Sigma - \lambda_1 I)\mathbf{c}_{.1} = 0$, находим компоненты собственного вектора $\mathbf{c}_{.1} = (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1})^T$ матрицы Σ .
4. Для каждого объекта подсчитываем значение первой главной компоненты

$$q_i = c_{11}(a_{i1} - \check{a}_{.1}) + c_{21}(a_{i2} - \check{a}_{.2}) + \dots + c_{n1}(a_{in} - \check{a}_{.n}). \quad (1.11)$$

В результате вышесприведенной процедуры мы получаем интегральный индикатор $\mathbf{q} = \{q_i\}_{i=1}^m$.

Для оценки качества построения интегрального индикатора использовалось значение величины

$$\rho = \frac{\lambda_1}{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{nn}}$$

отношения первого собственного значения λ_1 к сумме значений диагональных элементов ковариационной матрицы (1.10).

1.2.3 Сингулярное разложение

Рассмотрим приближенное линейное описание матрицы $A = \{a_{ij}\}$ вида

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^r u_{ik} \lambda_k v_{kj} + c_{ij}, \quad (1.12)$$

где $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$. Приближенное линейное описание (1.12) более подробно описано в [48]. Значения $u_{kj}, \lambda_k, v_{jk}$ для данного значения k найдены из условия минимума выражения

$$\varepsilon_n^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^2, \quad (1.13)$$

при ограничениях нормировки

$$\sum_{j=1}^n u_{kj}^2 = \sum_{i=1}^m v_{ik}^2 = 1 \quad (1.14)$$

и упорядоченности $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots \geq 0$.

Выражения (1.12), (1.13), (1.14) запишем в матричных обозначениях:

$$A = U \Lambda V^T + C,$$

$$\varepsilon^2 = \text{tr}(CC^T) = \|C\|^2,$$

$$U^T U = V V^T = 1,$$

где $U = \{u_{kj}\}, \Lambda = \{\lambda_k\}, V = \{v_{ik}\}$. Если значение r достаточно велико, то $C=0$. Так будет заведомо при $r \geq \min\{m, n\}$. Минимальное значение r , при котором выполнимо равенство $A = U \Lambda V^T$, равно рангу матрицы A . В работе [57] рассмотрена и доказана следующая теорема:

Теорема 1.1 (Дж. Форсайт). *Для любой вещественной $(n \times n)$ -матрицы A существуют две вещественные ортогональные $(n \times n)$ -матрицы U и V такие, что $U^T A V$ диагональная матрица Λ . Более того, можно выбрать U и V так, чтобы диагональные элементы Λ имели вид*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0,$$

где r — ранг матрицы A . В частности, если A невырождена, то

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0.$$

Здесь цитируемая теорема приведена в принятых ранее обозначениях, которые не изменяют ее сущности.

В работе [48] утверждается, что задача минимизации выражения (1.13) при условии (1.14) эквивалентна задаче приближенного представления функции двух переменных $\zeta(x, y)$ суммой попарных произведений $\sum_i \alpha_i(x)\beta_i(y)$ функций $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(y)$ одной переменной. В работе [33] предлагается квадратичный алгоритм решения этой задачи.

Найдем последовательно векторы $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ и сингулярные числа λ_k для $k = 1, \dots, r$. В качестве этих векторов берутся нормированные значения векторов \mathbf{a}_k и \mathbf{b}_k соответственно: $\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{a}_k}{\|\mathbf{a}_k\|}$, $\mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{b}_k}{\|\mathbf{b}_k\|}$. Векторы \mathbf{a}_k и \mathbf{b}_k находятся как пределы последовательностей векторов $\{\mathbf{a}_{k_i}\}$ и $\{\mathbf{b}_{k_i}\}$, соответственно $\mathbf{a}_k = \lim(\mathbf{a}_{k_i})$ и $\mathbf{b}_k = \lim(\mathbf{b}_{k_i})$. Сингулярное число λ_k находится как произведение норм векторов: $\lambda_k = \|\mathbf{a}_k\| \cdot \|\mathbf{b}_k\|$.

Процедура нахождения векторов $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ начинается с выбора наибольшей по норме строки \mathbf{b}_{1_1} матрицы A . Для $k = 1$ формулы нахождения векторов $\mathbf{a}_{1_i}, \mathbf{b}_{1_i}$ имеют вид:

$$\mathbf{a}_{1_i} = \frac{A\mathbf{b}_{1_i}^T}{\mathbf{b}_{1_i}\mathbf{b}_{1_i}^T}, \quad \mathbf{b}_{1_{i+1}} = \frac{\mathbf{a}_{1_i}^T A}{\mathbf{a}_{1_i}^T \mathbf{a}_{1_i}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Для вычисления векторов $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ при $k = 2, \dots, r$ используется вышеприведенная формула, с той разницей, что матрица A заменяется на скорректированную на k -м шаге матрицу $A_{k+1} = A_k - \mathbf{u}_k \lambda_k \mathbf{v}_k$.

В данной работе мы воспользовались следующим свойством сингулярного разложения. Так как матрицы U и V ортогональные, то есть

$$U^T U = V V^T = I, \tag{1.15}$$

где I — единичная матрица размерности $r \times r$, то из (1.15) следует, что

$$\begin{aligned} AA^T &= U\Lambda VV^T\Lambda U^T = U\Lambda^2U^T, \\ A^T A &= V^T\Lambda U^T U\Lambda V = V^T\Lambda^2V. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Умножая оба выражения справа соответственно на U и V^T получаем

$$\begin{aligned} AA^T U &= U\Lambda^2, \\ A^T A V^T &= V^T\Lambda^2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Из выражения (1.17) следует, что столбцы матрицы U являются собственными векторами матрицы AA^T , а квадраты сингулярных чисел $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ее собственными значениями, см. [46]. Также строки матрицы V являются собственными векторами матрицы $A^T A$, а квадраты сингулярных чисел являются ее собственными значениями.

Процедура нахождения интегрального индикатора по сингулярному разложению [57] заключается в следующем. Находим сингулярное разложение матрицы исходных данных. Согласно теореме 1.1 любую матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, в которой по условию (1.4) число строк m больше числа столбцов n , можно представить в виде произведения ортогональной матрицы U размерности $m \times m$, диагональной матрицы Λ размерности $n \times n$ и транспонированной ортогональной матрицы V , размерности $n \times n$.

$$A = U\Lambda V^T. \tag{1.18}$$

Матрица Λ содержит на своей диагонали убывающие по значению сингулярные числа. Выполняется условие

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \dots > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0),$$

где индекс r элемента λ_r есть фактическая размерность собственного пространства матрицы A . Находим проекцию всех векторов A на вектор матрицы U , соответствующий наибольшему сингулярному числу λ_1 :

$$\mathbf{q} = U \text{diag}(\lambda_1, 0, \dots, 0). \tag{1.19}$$

Как и в предыдущем методе вектор $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ является интегральным индикатором исследуемых объектов.

1.2.4 Расслоение Парето

Интегральный индикатор, полученный методом расслоения Парето [52], [24] инвариантен к любым преобразованиям исходных данных, сохраняющих порядок значений объектов внутри данного показателя. Это дает возможность опустить предварительную обработку данных, см. [8].

Имеем исходные данные представленные матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ и $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_\xi \in \mathbb{R}^n$ — векторы данной матрицы, описывающие i -й объект. Вектор $\mathbf{a}_\xi = \langle a_{\xi j} \rangle_{j=1}^n$ называется недоминируемым, если не найдется ни одного вектора \mathbf{a}_i такого, что

$$a_{ij} > a_{\xi j}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \quad (1.20)$$

Для некоторого вектора $\mathbf{a}_\xi \in W$ пространство $W = \mathbb{R}^n$, в котором он находится, является объединением двух областей $W = W_1 \cup W_2$. Недоминируемые векторы $\mathbf{a}_\xi \in W_1$, остальные доминируемые векторы $\mathbf{a}_i \in W_2$. При совпадении векторов $\mathbf{a}_\xi = \mathbf{a}_i$ считается, что оба вектора находятся, при соблюдении условия (1.20), в недоминируемой области: $\mathbf{a}_\xi, \mathbf{a}_i \in W_1$. Произвольный вектор \mathbf{a}_i сам себя не доминирует.

Для выполнения процедуры расслоения Парето требуется найти все недоминируемые векторы для каждого слоя. Определим исходные множества S и T как $S = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^m$ и $T = \emptyset$. Для ζ -го слоя множество

$$S_\zeta = \{\mathbf{a}_\xi : a_{\xi j} > a_{ij}, \mathbf{a}_\xi = \mathbf{a}_i, \xi \in \{1 \dots n\}\}_{i,j=1}^{m,n}.$$

Все найденные векторы $\{\mathbf{a}_\xi\} \in S_\zeta$ находятся в одном слое. Добавляем множество S_ζ в множество T . Исключаем множество векторов S_ζ из дальнейшего рассмотрения и повторяем процедуру для множества векторов $S \setminus T$ до тех пор,

пока в этом множестве не останется ни одного вектора. В результате расслоения получаем множество T , состоящее из l слоев S_ζ :

$$T = \bigcup_{\zeta=1}^l S_\zeta. \quad (1.21)$$

Для получения интегрального индикатора поставим в соответствие каждому вектору \mathbf{a}_ξ , $\xi = 1, \dots, m$ индекс ζ множества S_ζ , которому принадлежит вектор \mathbf{a}_ξ . Полученное множество $\Xi = \{\zeta_\xi\}_{\xi=1}^m$ приведем к виду $\mathbf{q} = \{\max(\Xi) - \zeta_\xi\}_{\xi=1}^m$, удовлетворяющему начальным условиям (1.2) и (1.3). Очевидно, что в данном случае $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^m$.

Существенным недостатком расслоения Парето является то, что при большой размерности пространства показателей или при отрицательной корреляционной зависимости показателей количество слоев l становится равным единице. Этот недостаток может быть обойден, если в качестве набора входных показателей взять только те показатели, вклад которых при нахождении первой главной компоненты матрицы A наиболее значителен.

Для множества базовых показателей объектов $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^n$ найдем такое подмножество $\Psi^* = \{\psi_{j_1}, \dots, \psi_{j_l}\}$, $j_k \in \{1, \dots, n\}$, $k = 1, \dots, l$, для которых число ν^* различных элементов множества $\mathbf{q}_p = \{q_1, \dots, q_m\}$, полученного посредством процедуры расслоения Парето, будет наиболее близко к ν . Значение ν определяется экспертом на основании сведений о числе ожидаемых кластеров, на которые разбивается множество объектов Υ , или на основании результатов процедуры кластеризации.

Подмножество базовых показателей Ψ^* строится следующим образом. Пусть \mathbf{q}_m — интегральный индикатор, полученный методом главных компонент и пусть \mathbf{a}_j — вектор-столбец матрицы A , соответствующий показателю ψ_j . Поставим в соответствие каждому показателю ψ_j коэффициент корреляции $r_j = r(\mathbf{q}_m, \mathbf{a}_j)$ и получим множество $\mathbf{r} = \langle r_1, \dots, r_j \rangle$. Из множества Ψ последовательно выберем

подмножества $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi^{(3)}, \dots$, которые состоят из одного, двух, трех и так далее элементов — показателей, имеющих наибольший коэффициент r_j корреляции с первой главной компонентой \mathbf{q}_m .

Для каждого такого подмножества $\Psi^{(i)}$ найдем интегральный индикатор $\mathbf{q}_p^{(i)}$ методом расслоения Парето. Искомым множеством Ψ^* будем считать такое множество $\Psi^{(i)}$, которому соответствует расслоение Парето с числом слоев, иначе числом ν^* различных элементов множества \mathbf{q}_p^* , наиболее близким к заданному числу ν .

Вклад показателей $\{\psi_{j_1}, \dots, \psi_{j_l}\}$ подмножества базовых показателей при нахождении первой главной компоненты вычисляется как отношение

$$\rho^* = \frac{r_1^* + \dots + r_l^*}{r_1 + \dots + r_n},$$

где r_1^*, \dots, r_l^* — множество коэффициентов корреляции между столбцами \mathbf{a}_j матрицы A , соответствующими построенному множеству Ψ^* , и первой главной компонентой \mathbf{q}_m ; и r_1, \dots, r_n — множество коэффициентов корреляции между всеми столбцами \mathbf{a}_j матрицы A и первой главной компонентой \mathbf{q}_m . Значение ρ^* характеризует качество интегрального индикатора, полученного процедурой расслоения Парето с использованием подмножества Ψ^* базовых показателей.

1.3 Кластеризация объектов при построении индикаторов

Пусть $\bar{A} = \{\bar{\mathbf{a}}_i\}_{i=1}^m$, и $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ — вектор, описывающий i -й объект. Предполагается, что выполнено условие (1.4). Найдем множество кластеров

$$S^p = \{S_\xi\}_{\xi=1}^k, \quad S_\xi = \{\bar{\mathbf{a}}_i : i \in \{1 \dots m\}\}$$

такое, что соблюдаются условия $\bigcup_{\xi=1}^k S_\xi = \bar{A}$ и $\bigcap_{\xi=1}^k S_\xi = \emptyset$. Найдем центр $\mathbf{y}_\xi = \{y_{\xi 1}, y_{\xi 2}, \dots, y_{\xi n}\}$ области, в которой лежит ξ -й кластер:

$$y_{\xi j} = \frac{1}{m_\xi} \sum_{i: x_i \in S_\xi} x_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

где m_ξ — количество векторов, принадлежащих ξ -му кластеру. Находим интегральный индикатор θ полученного множества векторов \mathbf{y}_ξ одним из вышеописанных методов “без учителя”.

Для получения интегрального индикатора всех объектов ранжируем объекты, описанные векторами \mathbf{a}_i внутри полученных кластеров S_ξ , затем, используя результаты вычисления интегральных индикаторов кластеров, создаем иерархический интегральный индикатор, представляющий множество пар $(\theta_\xi, \mathbf{q}_\xi)$.

$$\Theta = \{(\theta_\xi, \mathbf{q}_\xi)\}_{\xi=1}^k \quad (1.22)$$

Для экспертов такой интегральный индикатор представляет практический интерес при экспресс-анализе данных с целью выбора подмножества объектов для более детального рассмотрения. В этом случае когда объекты даже после нормирования исходных данных (1.4) оказываются несопоставимыми (один или несколько объектов значительно превосходят по некоторым показателям остальные объекты) множество объектов разбивается на кластеры [16] и находится интегральный индикатор непересекающихся областей, внутри которых расположены кластеры, а затем находится интегральный индикатор объектов внутри каждого кластера. Эксперты на основе результатов кластеризации и иерархического интегрального индикатора формируют множество объектов, добавляя или удаляя элементы по собственному усмотрению. Интегральный индикатор при этом вычисляется в порядковых шкалах и представляет собой множество, на котором введено отношение порядка и каждый его элемент — множество строк, на котором также введено отношение порядка.

Разбиение множества $\{\mathbf{a}_i\}$ на кластеры зависит от размерности подпространства $\mathbb{R}^r \in \mathbb{R}^n$, в котором находятся кластеры, и от задаваемых требований к искомой кластеризации. В данной работе при нахождении иерархического интегрального индикатора была использована следующая процедура кластеризации объектов [44], [63].

Пусть S^p — образ A при линейном отображении f

$$f : (A - B) \longrightarrow S^p,$$

где A — конечное множество векторов $A = \{\mathbf{a}_i : \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n\}_{i=1}^m$,

S^p — конечное множество векторов $S^p = \{\mathbf{s}_i : \mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^p\}_{i=1}^m$,

$B = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^m$ — матрица невязок, приближающая S^p к $f^{-1}(A)$.

При линейном отображении f каждый вектор \mathbf{a}_i отображается соответственно в вектор \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, m$. Пусть множество S^p состоит из упорядоченных подмножеств S_ξ^p , где

$$S^p = \{S_\xi^p : S_\xi^p \subseteq \mathbb{R}^{k \times p}\}_{\xi=1}^k$$

и выполняются условия $\bigcup_{\xi=1}^k S_\xi^p = S^p$ и $\bigcap_{\xi=1}^k S_\xi^p = \emptyset$. Множество S^p будем называть множеством кластеров матрицы A , представленных в пространстве \mathbb{R}^p .

Требуется представить матрицу A в виде $A \rightarrow S^p + B$, где $S^p = \bigcup_{\xi=1}^k S_\xi^p$ — объединение k кластеров, состоящих из векторов $\mathbf{a}_i \in A$, p — заданное число $p \in \mathbb{Z}^1$, при соблюдении условия $p \leq r$, где $r = \text{rank}(A - B)$. Затем, построить

$$T = \bigcup_{p=1}^r \bigcup_{\xi=1}^k S_\xi^p$$

где T — древовидный граф, включающий в себя все множества S^p , находящиеся в пространствах $\mathbb{R}^1, \dots, \mathbb{R}^r$.

Для решения поставленной проблемы использовалось сингулярное разложение исследуемой матрицы и отбор по критерию Евклидова расстояния между центрами кластеров.

Находим фактическую размерность [1] матрицы $(A - B)$, используя сингулярное разложение (1.19). Размерность матрицы $(A - B)$ соответствует индексу r сингулярного числа λ_r при выполнении условия

$$\frac{\lambda_r^2}{m} \leq \delta_p, \quad (1.23)$$

где δ_p — наперед заданная величина, зависящая от значения p , см. [47].

Очевидно, что при размерности собственного пространства $R^p : p = r$, где $r = \text{rank}(A - B)$, множество векторов $\mathbf{a}_i \in A$ будет представлено в виде только одного кластера $A = S_1^{p-r} + B$. Любой кластер фазовой траектории, находящийся в пространстве размерности p может быть представлен в виде объединения кластеров, находящихся в пространстве не большей размерности t , причем $1 \leq t \leq p \leq r$, $r = \text{rank}(A - B)$.

Рассмотрим процедуру кластеризации в пространстве \mathbb{R}^1 . В первой итерации каждый кластер S_ξ^1 содержит в себе только один вектор \mathbf{a}_i и $\xi = i = 1, \dots, m$. Дальнейшие итерации производятся следующим образом. Пусть $S_\xi^1 = \{\mathbf{a}_\zeta\}_{\zeta=1}^l$. Медианами кластера S_ξ^1 будем считать значение вектора $\mathbf{a}_{\frac{l}{2}}$, если l четно, или значение вектора $\mathbf{a}_{\frac{l+1}{2}}$, если l нечетно.

$$\begin{cases} \text{med}(S_\xi^1) = \mathbf{a}_{\frac{l}{2}}, & \text{if } \text{mod}_2(l) = 0; \\ \text{med}(S_\xi^1) = \mathbf{a}_{\frac{l+1}{2}}, & \text{if } \text{mod}_2(l) = 1. \end{cases}$$

Для значений $\xi = 2, \dots, k - 1$ рассматриваются кластеры $S_{\xi-1}^1, S_\xi^1, S_{\xi+1}^1$. Если расстояние (в заданной топологической метрике) между $\text{med}(S_{\xi-1}^1)$ и $\text{med}(S_\xi^1)$ меньше, чем расстояние между $\text{med}(S_\xi^1)$ и $\text{med}(S_{\xi+1}^1)$, то кластер S_ξ^1 присоединяется справа к кластеру $S_{\xi-1}^1$, в противном случае кластер S_ξ^1 присоединяется слева к кластеру $S_{\xi+1}^1$. Процесс присоединения кластера к правому или левому кластеру происходит только в том случае, если после присоединения размерность пространства, в котором существует данный кластер остается неизменной, с выполнением условия (1.23). Итеративный процесс присоединения кластеров считается завершенным, если никакой кластер S_ξ^1 , $\xi = 1, \dots, k$ нельзя присоединить к правому или левому соседнему кластеру.

Рассмотрим процесс кластеризации в пространстве \mathbb{R}^n . Пусть имеется множество кластеров S^{p-1} , состоящее из подмножеств S_ξ^{p-1} :

$$S^p = \{S_\xi^p : S_\xi^p \subseteq R^{k \times p}, \xi = 1, \dots, k\}.$$

Тогда процесс присоединения кластера S_ξ^{p-1} к левому или правому соседнему кластеру происходит и завершается так же, как и для случая кластеризации в пространстве \mathbb{R}^1 . Размерность пространства, в котором находится кластер после его присоединения к левому или правому соседнему кластеру не должна превышать заданного значения p .

Результат данной процедуры, представленный в виде множества T , используется для нахождения иерархического интегрального индикатора (1.22).

2 Согласование экспертных оценок

В данном разделе рассмотрена задача согласования экспертных оценок. Каждый объект можно оценить двумя путями: непосредственно через экспертную оценку и через взвешенную сумму значений показателей объекта, где веса определяются экспертными оценками показателей. В общем случае эти оценки различны. Описан метод, позволяющий получить непротиворечивые оценки объектов и показателей.

2.1 Постановка задачи согласования экспертных оценок

Заданы множество m объектов $\Upsilon = \{v_i\}_{i=1}^m$ и множество n показателей $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^n$. Множество измерений представлено в виде матрицы исходных данных, обозначаемой $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ в пространстве действительных чисел: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Произвольный объект описывается с помощью вектора-строки $\mathbf{a}_i = \langle a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in} \rangle$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$. Векторы-столбцы $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ матрицы A содержат измерения j -го показателя для всех измеряемых объектов.

Также задан упорядоченный набор $\mathbf{q}_0 = \langle q_{01}, \dots, q_{0m} \rangle^T$, $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$ экспертных оценок интегральных индикаторов m объектов и упорядоченный набор $\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, \dots, w_{0n} \rangle^T$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$ экспертных оценок весов n показателей. Каждому объекту v_i поставлена в соответствие экспертная оценка q_{0i} , также каждому показателю ψ_j поставлена в соответствие экспертная оценка w_{0j} .

Все экспертные оценки выполнены в линейных шкалах, то есть, векторы \mathbf{q}_0 и \mathbf{w}_0 известны с точностью до некоторых линейных преобразований.

Тройку $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ удобно представить с помощью следующей таблицы. В ней каждый элемент вектора \mathbf{q}_0 поставлен в соответствие строке матрицы A , а

каждый элемент вектора \mathbf{w}_0 поставлен в соответствие столбцу матрицы A :

$$\begin{array}{c|cccc}
 & w_{01} & w_{02} & \dots & w_{0n} \\
 \hline
 q_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\
 q_{02} & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 q_{0m} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \quad .
 \end{array} \tag{2.1}$$

Как описано в [2], по исходным экспертным оценкам весов показателей \mathbf{w}_0 можно вычислить значения вектора интегрального индикатора

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0, \tag{2.2}$$

также (см. [50] и [51]) по исходным экспертным оценкам значения вектора интегрального индикатора \mathbf{q}_0 можно вычислить веса показателей

$$\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0, \tag{2.3}$$

где A — линейный оператор, представляемый при помощи данной матрицы, A^+ — оператор, псевдообратный оператору A , см. [45], [10]. В общем случае вектор экспертной оценки \mathbf{q}_0 объектов и вектор взвешенной суммы значений показателей объектов \mathbf{q}_1 различны: $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{q}_1$, также $\mathbf{w}_0 \neq \mathbf{w}_1$.

Определение 2.1. *Согласованными значениями интегрального индикатора и весов показателей называются такие значения $\hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{w}}$, при которых выполняется условие*

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}} = A\hat{\mathbf{w}}, \\ \hat{\mathbf{w}} = A^+\hat{\mathbf{q}}. \end{cases} \tag{2.4}$$

При нахождении согласованных значений различными способами, мы будем предъявлять различные требования к тройкам $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ и $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$, описанные далее в разделах 2.2, 2.3.

Определение 2.2. *Оператором согласования экспертных оценок Φ называется оператор, переводящий тройку начальных информации $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ в тройку конечных информации $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$, где векторы $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}$ удовлетворяют условию (2.4):*

$$\Phi : (\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A) \longrightarrow (\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A). \quad (2.5)$$

Рассмотрим семейство операторов согласования $\Phi = \Phi(\Omega)$, определяемое процедурой согласования Ω .

2.2 Согласование в линейных шкалах

2.2.1 α -согласование

Введем процедуру пошагового согласования. Пусть A — матрица линейного оператора, отображающего пространство весов показателей $W \ni \mathbf{w}_0$ в пространство интегральных индикаторов объектов $Q \ni \mathbf{q}_0$:

$$A : W \longrightarrow Q,$$

и пусть для A существует псевдообратный оператор A^+ , отображающий пространство интегральных индикаторов в пространство весов показателей

$$A^+ : Q \longrightarrow W.$$

То есть, $A^+A = I_n$, $AA^+ = I_m$, $A^+AA^+ = A^+$, $AA^+A = A$, см [10].

Существует (см. теорему 1.1) сингулярное разложение невырожденной матрицы A вида

$$A = U\Lambda V^T,$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_R)$, $R = \min(m, n)$ и

$$U^T U = I_m, V V^T = I_n. \quad (2.6)$$

Теорема 2.1. *Матрица $A^+ = V^T \Lambda^{-1} U$ является для матрицы A псевдообратной.*

Доказательство. Согласно теореме 1.1 и выражению (2.6), $A^+A = V\Lambda^{-1}U^T U\Lambda V^T = I_m$, $AA^+ = U\Lambda V^T V\Lambda^{-1}U^T = I_n$. \square

Определим A^+ как

$$A^+ = V\Lambda_r^{-1}U^T, \quad (2.7)$$

где $\Lambda_r^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}, 0, \dots, 0)$ — диагональная матрица размерности $n \times n$.

Обозначим исходные значения векторов интегрального индикатора и весов показателей соответственно $\mathbf{q}_0 : \mathbf{q}_0 \in Q \subseteq \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{w}_0 : \mathbf{w}_0 \in W \subseteq \mathbb{R}^n$. Найдем отображение вектора \mathbf{w}_0 из пространства W в пространство Q :

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$$

и отображение вектора \mathbf{q}_0 из пространства W в пространство Q :

$$\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{w}_0.$$

Мы получили два отрезка — $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0] \subset Q$ и $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0] \subset W$. Евклидова длина этих отрезков $\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1\|$ и $\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|$ характеризует несогласованность экспертных оценок. Найдем согласованные оценки на этих отрезках. Для этого найдем среднее значение между векторами \mathbf{q}_0 и \mathbf{q}_1 , и между векторами \mathbf{w}_0 и \mathbf{w}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2 &= \alpha\mathbf{q}_0 + (1 - \alpha)\mathbf{q}_1, \\ \mathbf{w}_2 &= (1 - \alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha\mathbf{w}_1, \end{aligned}$$

где $\alpha : \alpha \in [0, 1]$ — параметр доверия экспертным оценкам интегральных индикаторов объектов, либо экспертным оценкам весов показателей. При значении $\alpha = 0$ мы игнорируем экспертные оценки объектов, учитывая оценки весов; при значении $\alpha = 1$ мы игнорируем экспертные оценки весов.

Считая полученные векторы \mathbf{q}_2 и \mathbf{w}_2 скорректированными экспертными оценками, повторим процедуру: $\mathbf{q}_3 = A\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3 = A^+\mathbf{q}_2$.

Процедура

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{2k+1} &= A\mathbf{w}_{2k}, \\
\mathbf{w}_{2k+1} &= A^+\mathbf{q}_{2k}, \\
\mathbf{q}_{2k+2} &= \alpha\mathbf{q}_{2k} + (1 - \alpha)\mathbf{q}_{2k+1}, \\
\mathbf{w}_{2k+2} &= (1 - \alpha)\mathbf{w}_{2k} + \alpha\mathbf{w}_{2k+1},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$ — шаг итерации, сходится на втором шаге.

Теорема 2.2. *Итеративная процедура (2.8) пошагового нахождения векторов $\mathbf{q}_k, \mathbf{w}_k$ эквивалентна процедуре нахождения векторов $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_\alpha &= \alpha\mathbf{q}_0 + (1 - \alpha)A\mathbf{w}_0, \\
\mathbf{w}_\alpha &= (1 - \alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Доказательство. Рассмотрим процедуру вычисления вектора \mathbf{w}_k при $k=0$ и $k=1$. Имеем заданный вектор \mathbf{w}_0 . Посредством прямого отображения $A : W \rightarrow Q$ и обратного отображения $A^+ : Q \rightarrow W$, а также операции усреднения, получаем для $k = 0$ вектор $\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$, и вектор $\mathbf{w}_2 = (1 - \alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha\mathbf{w}_1$; для $k = 1$ вектор $\mathbf{w}_3 = A^+\mathbf{q}_2$ и вектор $\mathbf{w}_4 = (1 - \alpha)\mathbf{w}_2 + \alpha\mathbf{w}_3$. Так как вектор \mathbf{q}_2 в свою очередь равен $\mathbf{q}_2 = \alpha\mathbf{q}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, то

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_3 &= A^+\mathbf{q}_2 = \\
&A^+(\alpha\mathbf{q}_0 + (1 - \alpha)A\mathbf{w}_0) = \\
&\alpha A^+\mathbf{q}_0 + (1 - \alpha)A^+A\mathbf{w}_0 = \\
&(1 - \alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0.
\end{aligned}$$

Вектор \mathbf{w}_4 можно выразить в такой же форме:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_4 &= (1 - \alpha)\mathbf{w}_2 + \alpha\mathbf{w}_3 = \\
&(1 - \alpha)((1 - \alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0) + \alpha((1 - \alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0) = \\
&\mathbf{w}_0 - 2\alpha\mathbf{w}_0 + \alpha^2\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0 - \alpha^2 A^+\mathbf{q}_0 + \alpha\mathbf{w}_0 - \alpha^2\mathbf{w}_0 + \alpha^2 A^+\mathbf{q}_0 = \\
&\mathbf{w}_0 - \alpha\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0 = \\
&(1 - \alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0.
\end{aligned}$$

Таким образом на втором шаге выполнения процедуры при значении $k = 1$ вектор \mathbf{w}_3 становится равен вектору \mathbf{w}_4 . Докажем, что $\mathbf{w}_{2k+1} = \mathbf{w}_{2k}$ равны при $k \geq 2$. Согласно условию (2.4), $w_{2k+1} = A^+ \mathbf{q}_{2k}$ и $w_{2k+2} = (1 - \alpha) \mathbf{w}_{2k} + \alpha \mathbf{w}_{2k+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} A^+ \mathbf{q}_{2k} &= (1 - \alpha) \mathbf{w}_{2k} + \alpha \mathbf{w}_{2k+1}, \\ \alpha \mathbf{w}_{2k+1} &= A^+ \mathbf{q}_{2k} - \mathbf{w}_{2k} + \alpha \mathbf{w}_{2k}, \\ \alpha \mathbf{w}_{2k+1} &= \alpha \mathbf{w}_{2k}, \end{aligned}$$

в силу того, что $A^+ \mathbf{q}_{2k} - \mathbf{w}_{2k} = 0$. Аналогичным способом доказывается сходимость процедуры вычисления вектора \mathbf{q}_k за конечное число шагов. \square

Утверждение 2.1. *Векторы \mathbf{q}_α и \mathbf{w}_α лежат соответственно на отрезках $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0] \subset Q$ и $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0] \subset W$.*

Доказательство. Из определения [29], если x и y — элементы множества $U : U = \mathbb{R}^n$ и θ — действительное число, то множество

$$\{z \in U : z = \theta x + (1 - \theta)y, 0 \leq \theta \leq 1\} \quad (2.10)$$

называется отрезком, соединяющим x и y . Произведение $\mathbf{q}_1 = A \mathbf{w}_0 : A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$ является элементом, принадлежащим множеству \mathbb{R}^m и $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$. Выражение \mathbf{q}_α является выпуклой линейной комбинацией, $\mathbf{q}_\alpha \in [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0]$ при значениях $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$.

Псевдообратный линейный оператор является непрерывным в \mathbb{R}^n , поэтому произведение $\mathbf{w}_1 = A^+ \mathbf{q}_0 : A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$ есть элемент множества \mathbb{R}^n . Вектор \mathbf{q}_0 также принадлежит множеству \mathbb{R}^n . Вектор $\mathbf{w}_\alpha \in [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0]$ при значениях $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$. \square

Утверждение 2.2. *Существуют такие α, β , при которых значения векторов $\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{q}_\beta$*

$$\begin{aligned} \{\mathbf{w}_\alpha : \mathbf{w}_\alpha &= (1 - \alpha) \mathbf{w}_0 + \alpha \mathbf{w}_1\} \in [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1], \\ \{\mathbf{q}_\beta : \mathbf{q}_\beta &= \beta \mathbf{q}_0 + (1 - \beta) \mathbf{q}_1\} \in [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1], \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta \in [0, 1]$, удовлетворяют требованиям согласования, то есть, $A\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{q}_\beta$, причем $\alpha = 1 - \beta$.

Доказательство. Так как $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$, и линейный оператор $A : [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1] \longrightarrow [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$, то равенство $(1-\alpha)A\mathbf{w}_0 + \alpha A\mathbf{w}_1 = (1-\beta)\mathbf{q}_0 + \beta\mathbf{q}_1$ справедливо при $\alpha = 1 - \beta$. \square

Очевидно, что процедура α -согласования дает согласованный результат.

Утверждение 2.3. *Тройка $(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha, A)$, полученная процедурой α -согласования (2.9) удовлетворяет требованиям согласования (2.4).*

Доказательство. Подставив в равенство $A\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha$ выражения для \mathbf{q}_α и \mathbf{w}_α получаем $\alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 = A((1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0)$, или, $\alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 = (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 + \alpha AA^+\mathbf{q}_0$. Так как $AA^+\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0$, то $\alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 = (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 + \alpha\mathbf{q}_0$. \square

Таким образом, выбирая параметр α , мы с помощью выражения (2.9) находим согласованные значения векторов экспертных оценок: $\mathbf{q}_\alpha = A\mathbf{w}_\alpha$.

Оценим невязку при выбранном параметре α . Евклидово расстояние между исходными векторами $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ и полученными векторами $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ в пространстве интегральных индикаторов и в пространстве весов соответственно равны

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \|\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_0\|^2, \\ \delta^2 &= \|\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_0\|^2.\end{aligned}\tag{2.11}$$

В качестве критерия выбора параметра α возьмем условие минимального расстояния между начальными и согласованными экспертными оценками в обоих пространствах Q и W . Учитывая, что размерности этих пространств соответственно равны m и n , нормируем квадраты расстояний и находим такие согласованные значения векторов \mathbf{q}_α и \mathbf{w}_α , что они удовлетворяют условию

$$\frac{\varepsilon^2}{m} = \frac{\delta^2}{n}.\tag{2.12}$$

На практике эксперты сами могут выбирать значение параметра α в зависимости от предпочтений важности оценок объектов или оценок показателей.

Полученные результаты удобно предложить экспертам на обсуждение в следующем виде:

начальные		w_{01}	w_{02}	\dots	w_{0n}
	конечные	$w_{\alpha 1}$	$w_{\alpha 2}$	\dots	$w_{\alpha n}$
q_{01}	$q_{\alpha 1}$	a_{11}	a_{21}	\dots	a_{1n}
q_{02}	$q_{\alpha 2}$	a_{12}	a_{22}	\dots	a_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
q_{0m}	$q_{\alpha m}$	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}

(2.13)

При изменении параметра доверия экспертов α к экспертным оценкам объектов и показателей или при изменении самих экспертных оценок вышеописанную процедуру можно повторить и передать на обсуждение экспертов вновь полученные результаты.

2.2.2 γ^2 -согласование

Определим согласованное решение как решение удовлетворяющее условию (2.4), при котором расстояние от согласованных векторов \mathbf{q}_γ и \mathbf{w}_γ таких, что $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$ до соответственно векторов экспертных оценок \mathbf{q}_0 и \mathbf{w}_0 будет минимальным.

Пусть

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2, \\ \delta^2 &= \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Решение задачи нахождения минимального расстояния от согласованных векторов до векторов экспертных оценок имеет вид

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg \min_{\mathbf{w} \in W} (\varepsilon^2 + \gamma^2 \delta^2),\tag{2.15}$$

где весовой множитель $\gamma^2 \in (0, \infty)$ — определяет степень компромисса между оценкой объектов и показателей. При малых значениях γ^2 в большей степени

учитывается экспертная оценка объектов, а при больших значениях γ^2 в большей степени учитывается экспертная оценка показателей.

Теорема 2.3. *Функционал $(\varepsilon^2 + \gamma^2 \delta^2)$ достигает единственного глобального минимума на множестве $\mathbf{w}_\gamma \in W$ в точке*

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1} (A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0). \quad (2.16)$$

Доказательство. Функционал $(\varepsilon^2 + \gamma^2 \delta^2)$ есть строго выпуклая функция, поэтому точка минимума выражения (2.15) существует и единственна. Найдем эту точку. Подставляя правые части выражения (2.14) в выражение (2.15) получаем

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg \min_{\mathbf{w} \in W} (\|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2 + \gamma^2 \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2).$$

Используем обозначение нормы вектора $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_i x_i^2$ через скалярное произведение (\mathbf{x}, \mathbf{x}) . Представим функционал $(\varepsilon^2 + \gamma^2 \delta^2)$ в виде

$$\begin{aligned} & \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2 + \gamma^2 \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2 = \\ & (A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0, A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0) + \gamma^2 (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0, \mathbf{w} - \mathbf{w}_0) = \\ & (A\mathbf{w}, A\mathbf{w}) - 2(A\mathbf{w}, \mathbf{q}_0) + (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) + \gamma^2 (\mathbf{w}, \mathbf{w}) - 2\gamma^2 (\mathbf{w}, \mathbf{w}_0) + \gamma^2 (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0) = \\ & (A^T A \mathbf{w}, \mathbf{w}) - 2(A^T \mathbf{q}_0, \mathbf{w}) + (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) + \gamma^2 (\mathbf{w}, \mathbf{w}) - 2\gamma^2 (\mathbf{w}, \mathbf{w}_0) + \gamma^2 (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0) = \\ & (A^T A \mathbf{w} - 2A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w} - 2\gamma^2 \mathbf{w}_0, \mathbf{w}) + (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) + \gamma^2 (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0). \end{aligned}$$

Полученное выражение имеет минимум по \mathbf{w} при значении $\nabla_{\mathbf{w}} = 0$, где

$$\nabla_{\mathbf{w}} = 2(A^T A + \gamma^2 I)\mathbf{w} - 2(A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0),$$

здесь I — единичная матрица, размерность которой равна размерности матрицы $A^T A$. Из предыдущего выражения находим вектор $\mathbf{w}_\gamma \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет условию (2.15):

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1} (A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0).$$

□

Утверждение 2.4. *Тройка, полученная процедурой γ^2 -согласования*

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1} (A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0),$$

удовлетворяет требованиям согласования (2.4).

Доказательство. Так как $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$, то $A(A^T A + \gamma^2 I)^{-1} (A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0) = A\mathbf{w}_\gamma$. \square

Параметр γ^2 для получения согласованных векторов $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$ и \mathbf{w}_γ выбирается исходя из условия $\frac{\varepsilon^2}{m} = \frac{\delta^2}{n}$ или назначается экспертами. Некоторые способы выбора параметра γ^2 описаны также в [61].

2.3 Согласование в ранговых шкалах

В рамках данной работы было сделано два утверждения о точности оценок, выставленных экспертами. Согласно первому утверждению эксперты способны выставлять адекватные оценки в линейной шкале, и с множеством оценок допустимы любые линейные преобразования. Согласно второму утверждению эксперты не способны выставлять адекватные оценки, но могут только сравнить объекты друг с другом, то есть выставить оценки в ранговой шкале.

В данном разделе предложена процедура, где с экспертными оценками $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ разрешены любые преобразования, сохраняющие порядок. При нахождении согласованных оценок вводились монотонные корректирующие функции $T_q : Q \rightarrow Q$ и $T_w : W \rightarrow W$, наилучшим образом приближающие начальные экспертные оценки при сохранении отношения порядка.

2.3.1 τ -согласование

Предложена процедура, где с оценками $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ разрешены любые монотонные преобразования. То есть, введено отношение порядка на множестве элементов векторов $\mathbf{w}_0 = \{w_j : w_1 \leq \dots \leq w_n\}_{j=1}^n$ и $\mathbf{q}_0 = \{q_i : q_1 \leq \dots \leq q_m\}_{i=1}^m$, которое

задает соответственно конусы $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^m$. При нахождении согласованных оценок вводились монотонные корректирующие функции $T_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ и $T_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, приближающие начальные экспертные оценки при сохранении отношения порядка.

Дана тройка $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$. Найдем такие векторы $\mathbf{q}_\tau = T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{q}_0)$ и $\mathbf{w}_\tau = T_{\mathcal{W}}(\mathbf{w}_0)$, что выполняется условие минимума невязки

$$AT_{\mathcal{W}}(\mathbf{w}_0) - T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{q}_0) = \Delta. \quad (2.17)$$

Для $k = 0, \dots, K$ укажем такие векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{k+1} &= T_{\mathcal{W},k}(\mathbf{w}_k, A^+ \mathbf{q}_k), \\ \mathbf{q}_{k+1} &= T_{\mathcal{Q},k}(\mathbf{q}_k, A \mathbf{w}_k), \end{aligned} \quad (2.18)$$

которая доставляют минимум функционалу $\|\Delta_k\|^2 = \|A \mathbf{w}_k - \mathbf{q}_k\|^2$. Векторы $\mathbf{q}_\tau, \mathbf{w}_\tau$, находим в результате композиции $T_{\mathcal{Q}} = T_{\mathcal{Q},1} \circ \dots \circ T_{\mathcal{Q},K}$ и $T_{\mathcal{W}} = T_{\mathcal{W},1} \circ \dots \circ T_{\mathcal{W},K}$.

Оператор нахождения согласованных оценок при выполнении алгоритма τ -согласования можно представить в виде композиции функций, как видно из рис. 1.

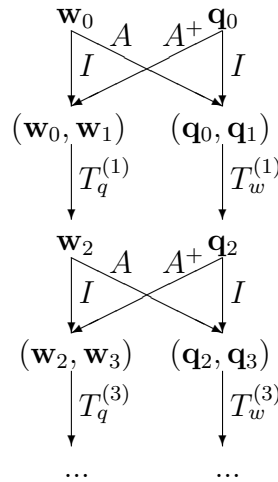


Рис. 1: Итеративная процедура τ -согласования

2.3.2 Нахождение корректирующей функции T

Рассмотрим два множества $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_m : t_1 \leq \dots \leq t_m\}$. Множество пар $\phi = \{(t_1, x_1), \dots, (t_m, x_m)\}$ задают функцию ϕ , и $x_i = \phi(t_i)$. Функция ϕ вообще говоря, немонотонна. Найдем такую монотонную функцию $f : t \rightarrow x$, $f \in P_m$ которая аппроксимирует ϕ ,

$$f(t) = \arg \min_{f \in P_m} \sum_{i=1}^m (f(t_i) - \phi(t_i))^2,$$

где P_m множество всех возрастающих полиномов степени $p \leq m$. Также найдем такую функцию $\varphi : t \rightarrow x$, $\varphi \in \Theta$, которая интерполирует множество пар ϕ :

$$\varphi(t) = \arg \min_{\varphi \in \Theta} \|\varphi(t) - \phi(t)\|,$$

где Θ — множество полиномиальных сплайнов с m узлами степени r дефекта 1.

Для приближения функции φ функцией f воспользуемся методом касательных Ньютона-Канторовича. Рассмотрим $f(t), \varphi(t)$ на отрезке $S = [a, b] \ni t$. Требуется найти гомеоморфизм $\vartheta : S \rightarrow S$, $\vartheta(t) = t + \tau(t)$ такой, что

$$\vartheta = \arg \min_{\tau \in S} \|f(t) - \varphi(\vartheta(t))\|^2$$

при значении $\tau = O(t)$. Для нахождения τ представим $\varphi(\vartheta(t))$ в виде $\varphi(\vartheta(t)) = \varphi(t) + \tau(t)\varphi'(t) + O(\tau^2(t))$.

Теорема 2.4 (В. В. Шакин). *Решением задачи оптимизации*

$$\tau_\epsilon(t) = \arg \min_{\tau \in S} \left(\|f(t) - \varphi(t)\|^2 + \epsilon^2 \|\tau(t)\|^2 \right)$$

является выражение

$$\tau_\epsilon(t) = \frac{(f(t) - \varphi(t))\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2 + \epsilon^2}.$$

Зададим искомую функцию $T : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ следующим образом. Подставляя в найденную функцию $\varphi(\vartheta(t))$ значения t_i из ϕ получаем скорректированные

оценки $y_i = \varphi(\vartheta(t_i))$, $i = 1, \dots, m$. Параметр ϵ^2 , определяющий, насколько велика разность между значениями, которые принимает функция φ в точках t и $\vartheta(t)$, подбирается таким образом, чтобы функция $T(\vartheta(t))$ была монотонной.

Процедура τ -согласования может быть переформулирована в других терминах. Пусть компоненты векторов $\mathbf{q}_0 = \langle q_{01}, \dots, q_{0m} \rangle$ и $\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, \dots, w_{0n} \rangle$ упорядочены по убыванию, то есть $q_{01} \geq q_{02} \geq \dots \geq q_{0m}$ и $w_{01} \geq w_{02} \geq \dots \geq w_{0n}$. Тогда векторное пространство \mathcal{Q} над \mathbb{R}^m является пространством с положительным конусом $\mathcal{Q}_+ = \{\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}, \mathbf{q}_0 \geq 0\}$ и векторное пространство \mathcal{W} над \mathbb{R}^n является пространством с положительным конусом $\mathcal{W}_+ = \{\mathbf{w}_0 \in \mathcal{W}, \mathbf{w}_0 \geq 0\}$. Строки \mathbf{a}_i матрицы исходных данных A из тройки $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ соответствуют элементам q_{0i} вектора \mathbf{q}_0 , а столбцы \mathbf{a}_j соответствуют элементам w_{0j} вектора \mathbf{w}_0 .

Линейный оператор A отображает конус \mathcal{W}_+ в конус $A\mathcal{W}_+$. Рассмотрим множество $\mathcal{Y} \equiv \mathcal{Q} \cap A\mathcal{W}_+$, полученное в результате отображения $A : \mathcal{W}_+ \rightarrow A\mathcal{W}_+$. Возможны два различных результата такого отображения: первый — полученное множество \mathcal{Y} не пусто, второй — множество \mathcal{Y} пусто.

Пусть $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Процедура τ -согласования

$$AT_w(\mathbf{w}_0) = T_q(\mathbf{q}_0) + \Delta$$

получает согласованную тройку $(\mathbf{q}_\tau, \mathbf{w}_\tau, A)$ такую, что $\mathbf{q}_\tau = T_q(\mathbf{q}_0)$, $\mathbf{w}_\tau = T_w(\mathbf{w}_0)$ и $\delta^2 = \|\Delta\|^2 = 0$, если пересечение конусов \mathcal{Q} и $A\mathcal{W}$ не пусто: $\mathcal{Y} \equiv \mathcal{Q} \cap A\mathcal{W} \neq \emptyset$.

Если множество \mathcal{Y} пусто, то после выполнения процедуры τ -согласования для получения оценок, удовлетворяющих требованию согласованности (2.4), к результатам \mathbf{q}_τ и \mathbf{w}_τ следует применить одну из процедур согласования оценок в линейных шкалах.

2.3.3 Описание алгоритма τ -согласования

На каждом шаге итерации выполняется следующая последовательность операций:

1. Производится прямое A и обратное A^+ отображение, находятся значения векторов $\mathbf{q}_{2k+1} = A\mathbf{w}_{2k}$, $\mathbf{w}_{2k+1} = A^+\mathbf{q}_{2k}$.
2. Далее находятся скорректированные значения векторов \mathbf{q}_{2k+2} , \mathbf{w}_{2k+2} . Для простоты описания рассмотрим эту процедуру только в пространстве векторов интегральных индикаторов \mathcal{Q} .
3. Для пары $(\mathbf{q}_{2k}, \mathbf{q}_{2k+1})$ строится табличная функция ϕ .
4. Находится монотонная полиномиальная функция $f(t)$, аппроксимирующая ϕ , и полиномиальный сплайн $\varphi(t)$, интерполирующий ϕ .
5. Отыскивается приближение $\varphi(\vartheta(t)) \rightarrow f(t)$ такое, что при заданном значении ϵ^2 сохраняется отношение порядка для элементов множеств $\{\phi(t_i)\}_{i=1}^m$, $\{\varphi(\vartheta(t_i))\}_{i=1}^m$.
6. По приближению $\varphi(\vartheta(t))$ строится скорректированный вектор $\mathbf{q}_{(2k+2)}$.
7. Предыдущие пункты (3-6) повторяются для нахождения вектора $\mathbf{w}_{(2k+2)}$.
8. Проверяются выполнение условия (2.17) согласованности векторов: $A\mathbf{w}_{(2k+2)} = \mathbf{q}_{(2k+2)} + \delta$ при заданном значении δ .
9. Если условие согласованности не выполняется, то процедура начинается с начала для следующего шага с номером $2k$.

Полученные значения векторов интегрального индикатора \mathbf{q}_τ и \mathbf{w}_τ использовались в качестве скорректированных экспертных оценок и были предложены на обсуждение экспертам. Для получения согласованных оценок, то есть тройки $(\hat{\mathbf{q}}_0, \hat{\mathbf{w}}_0, A)$, которая удовлетворяет условию (2.4), скорректированная тройка $(\mathbf{q}_\tau, \mathbf{w}_\tau, A)$, полученная в результате выполнения процедуры τ -согласования, была использована как исходная для процедуры γ^2 -согласования. Результат работы

процедуры — тройка $(\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma, A)$ — был предложен для построения модели нахождения интегральных индикаторов “без учителя” $\mathbf{q} = A\mathbf{w}_0$ при том условии, что экспертные оценки выставлены с точностью до монотонного преобразования.

2.4 Регуляризация при нахождении согласованных оценок

Очень важной проблемой при нахождении согласованных оценок становится проблема выбора алгоритма вычисления псевдообратного оператора $A^+ : Q \rightarrow W$. В настоящее время эта проблема решается следующим образом. Для данного псевдообратного оператора $A^+ = A^+(\Omega)$ находятся согласованная тройка $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$ такая, что сумма расстояний от векторов экспертных оценок до векторов согласованных значений становится минимальной. Иначе, имеется множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$, алгоритмов вычисления псевдообратного оператора A^+ . Из данного множества выбирается такой алгоритм ω , что для полученного $A^+ = A^+(\omega)$ имеет место $\min_{\omega \in \Omega} (\frac{\varepsilon^2}{m-1} + \frac{\delta^2}{n-1})$, где $\varepsilon^2 = \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_0\|^2$, и $\delta^2 = \|\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_0\|^2$.

Для решения задачи были предложены следующие способы нахождения псевдообратного оператора A^+ : обращение методом наименьших квадратов, см. [18] и [10], регуляризация псевдообратного оператора методом Тихонова, см. [45], [55] и обращение усеченного сингулярного разложения.

Первые два алгоритма находят псевдообратный оператор $A^+ = (A^T A + \gamma^2 I)$ со значением регуляризирующего параметра $\gamma^2 = 0$ для первого алгоритма и со значением γ^2 , отличным от нуля, для второго алгоритма.

Алгоритм обращения матрицы посредством усеченного сингулярного разложения состоит в следующем. Пусть матрица исходных данных A представлена в виде $A = U\Lambda V^T$. Тогда при нахождении обратной матрицы $A^+ = V\Lambda^{-1}U^T$ в силу ортогональности матриц U и V : $U^T U = VV^T = I$, и в силу условия убывания диагональных элементов матрицы $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, псевдообратная матрица A^+ будет более зависеть от тех элементов матрицы Λ , которые

имеют меньшие значения, чем от первых сингулярных чисел. Действительно, если, по условию теоремы о сингулярном разложении матрица A имеет сингулярные числа $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, то сингулярные числа матрицы A^+ равны $\Lambda^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})$ и $\frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{1}{\lambda_2} \dots \leq \frac{1}{\lambda_n}$. Считая первые r сингулярных чисел определяющими собственное пространство матрицы A , используем при обращении матрицы A первые r сингулярных чисел. Тогда обратная матрица A^+ будет найдена как $A^+ = V\Lambda_r^{-1}U^T$. Процедура нахождения обратной матрицы по первым главным компонентам описана также в [41].

Для решения задачи согласования оценок в линейных или ранговых шкалах существуют методы, позволяющие находить согласованные оценки без построения обратного оператора. В самом деле, экспертную оценку \mathbf{q}_0 согласно поставленной модели линейной зависимости интегральных индикаторов объекта от показателей объекта можно представить как проекции векторов \mathbf{a}_i , описывающих объекты, на прямую, однозначно определяемую некоторым вектором \mathbf{w} , в общем случае отличным от вектора \mathbf{w}_0 , который назначили эксперты. Согласованной тройкой в этом случае будет называться тройка $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$ в которой выполняется условие $A\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{q}}$. Дополнительным условием для задачи по согласованию оценок, выставленных в линейных шкалах, будет условие минимума значения $\min_{\mathbf{q} \in Q, \mathbf{w} \in W} \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_0\|^2 + \|\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_0\|^2$. Дополнительным условием для задачи по согласованию оценок, выставленных в ранговых шкалах, будет условие минимума значения $\min(r_{\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_0} + r_{\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{w}_0})$, где $r_{\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_0}, r_{\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{w}_0}$ — коэффициенты ранговой корреляции между исходными и согласованными оценками. Решение для экспертных оценок, выставленных в линейных шкалах, находится численными методами, например, методом покоординатного спуска, а для экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах, находится методами линейного программирования.

Для обоснования предложенных методов согласования докажем следующие теоремы. Лемма о непрерывности обратного отображения, впервые сформули-

роvanная А. Н. Тихоновым, приведена из работы [45] в обозначениях, принятых ранее в настоящей работе.

Лемма 2.1 (А. Н. Тихонов). *Пусть метрическое пространство \mathbb{W} отображается на метрическое пространство \mathbb{Q} и Q — образ множества W , $W \subset \mathbb{W}$, при этом отображении. Если отображение $A : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{Q}$ непрерывно, взаимнооднозначно, и множество W компактно на \mathbb{W} , то обратное отображение $A^+ : Q \longrightarrow W$ множества Q на множество W также непрерывно по метрике пространства \mathbb{W} .*

Тройка $(\mathbf{q}, \mathbf{w}, A)$ определена на следующих метрических пространствах. Вектор \mathbf{q} является элементом Q , где область Q является компактной в \mathbb{Q} : $Q \subset \mathbb{Q} \equiv \mathbb{R}^m$, так как область Q замкнута и ограничена. Также вектор \mathbf{w} является элементом W , где область W является компактной в \mathbb{W} : $W \subset \mathbb{W} \equiv \mathbb{R}^n$, так как область W замкнута и ограничена. Метрика задается нормами векторов $\|\mathbf{q}\|^2$ для компакта Q и $\|\mathbf{w}\|^2$ для компакта W . Функционал $\rho_Q = \rho_Q(A\mathbf{w}, \mathbf{q})$ определим как $\rho_Q = \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}\|^2$.

Следствие 2.1. *Псевдообратный оператор A^+ определенный как $A^+ = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1}$ является непрерывным по метрике пространства \mathbb{W} .*

Теорема 2.5. *Псевдообратный оператор A^+ , полученный методом обращения усеченного сингулярного разложения является непрерывным в r -мерном подпространстве.*

Доказательство. Отметим, что оператор A является обратным для оператора $A^+ : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{W}$. Оператор A^+ определен в пространстве \mathbb{R}^r , так как согласно теореме о сингулярном разложении матрицы U и V являются ортогональными, а матрица Λ является диагональной. Матрица Λ_r получается из матрицы Λ путем замены части диагонали, начиная с элемента с номером $r + 1$, нулевыми значениями. Прообраз $A(G)$ всякого открытого в \mathbb{W} множества G открыт в \mathbb{Q} в

силу того, что A — линейный оператор. Также, прообраз $A(F)$ всякого замкнутого в \mathbb{W} множества F замкнут в \mathbb{Q} . Следовательно, оператор A^+ непрерывен в r -мерном подпространстве. \square

Так как оператор A в уравнении $A\mathbf{w} = \mathbf{q}$ вполне непрерывный, то построение устойчивого к малым изменениям правой части \mathbf{q} приближенного решения этого уравнения по формуле $\mathbf{q} = A^+\mathbf{w}$ возможно в тех случаях, когда решение ищется на компакте $W \subset \mathbf{W}$ и правая часть уравнения принадлежит множеству $Y = AW$. Следующее определение принадлежит В. К. Иванову, впервые предложившему понятие квазирешения, см. [17].

Определение 2.3. *Элемент $\mathbf{w} \in W$, минимизирующий при данном \mathbf{q} функционал $\rho_{\mathbb{Q}}(A\mathbf{w}, \mathbf{q})$ на множестве W , называется квазирешением уравнения $A\mathbf{w} = \mathbf{q}$ на W ,*

$$\rho_{\mathbb{Q}}(A\mathbf{w}, \mathbf{q}) = \inf_{\mathbf{w} \in W} \rho_{\mathbb{Q}}(A\mathbf{w}, \mathbf{q}).$$

Так как W — компакт, то квазирешение существует для любого $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}$, и если, кроме того, $\mathbf{q} \in AW$, то квазирешение совпадает с точным решением уравнения $A\mathbf{w} = \mathbf{q}$. Может быть несколько квазирешений. Тогда под квазирешением понимается любое решение из множества квазирешений. Можно указать достаточные условия, при которых квазирешение единственно и непрерывно зависит от правой части \mathbf{q} .

Определение 2.4. *Пусть элемент \mathbf{q} и множество Y принадлежат пространству \mathbb{Q} . Элемент \mathbf{y} множества Y называется проекцией элемента \mathbf{q} на множество Y , $\mathbf{y} = P\mathbf{q}$, если выполняется равенство*

$$\rho_{\mathbb{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{y}) = \rho_{\mathbb{Q}}(\mathbf{q}, Y),$$

где

$$\rho_{\mathbb{Q}}(\mathbf{q}, Y) = \inf_{\mathbf{h} \in Y} \rho_{\mathbb{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{h}).$$

Теорема 2.6 (А. Н. Тихонов). *Если уравнение $A\mathbf{w} = \mathbf{q}$ может иметь на компакте Q не более одного решения и проекция каждого элемента $\mathbf{q} \in Q$ на множество $Y = AW$ единственна, то квазирешение уравнения $A\mathbf{w} = \mathbf{q}$ единственно и непрерывно зависит от правой части \mathbf{q} .*

Задача нахождения тройки $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$ называется корректно поставленной на паре метрических пространств (Q, W) , если удовлетворяются условия:

1. для всякого элемента $\hat{\mathbf{q}} \in Q$ существует решение $\hat{\mathbf{w}} \in W$;
2. решение определяется однозначно;
3. задача устойчива на пространствах Q, W .

Данное определение взято из [45] с ранее принятой нотацией. Таким образом, мы получили решения задач (2.9) и (2.16), корректные по Адамару.

3 Результаты

Для решения задачи по оценке эффективности управления заповедниками были собраны следующие данные:

- ежегодные отчеты заповедников за 1995-2000 гг.,
- экспертные оценки интегральных индикаторов заповедников,
- экспертные оценки весов показателей ежегодных отчетов,
- мнения экспертов относительно разделения заповедников на кластеры,
- мнения экспертов относительно модели порождения данных и применения предложенных процедур согласования экспертных оценок.

В данной работе, в качестве иллюстративного примера выбраны данные ежегодных отчетов по разделу “Работа службы охраны заповедников Российской Федерации”, описанные в таблице 2. Предлагаемые процедуры были применены к выбранным данным, результаты обработки данных описаны ниже.

3.1 Описание библиотеки функций

Для вычисления интегральных индикаторов по данным измерений и экспертным оценкам было разработано специальное программное обеспечение. Оно включает библиотеки, написанные на языке *Mathematica* и средства визуализации результатов нахождения интегральных индикаторов объектов и весов показателей. Ниже приводится список библиотечных функций с их кратким описанием. Все основные результаты были получены с помощью нижеприведенных функций.

Для функций `ColumnNormalize`, `MinkowskiDistance`, `PrincipalComponents`, `SingularComponents`, `ParetoClassify`, не выполняющих процедуры согласования, исходными данными является матрица $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, описанная в разделе 1.1, в

которой строки соответствуют объектам, а столбцы соответствуют показателям. Матрица A при описании функций обозначается `matrix`. Результатом работы функций является вектор интегральных индикаторов, соответствующих объектам.

Для функций `AlphaConcordance`, `GammaConcordance` и `TauConcordance`, выполняющих процедуры согласования, исходными данными является тройка $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$, описанная в разделе 2. Тройка при описании функций обозначается `triplet`. Результатом работы функций является согласованная тройка $(\mathbf{q}, \mathbf{w}, A)$.

Функция `ColumnNormalize[matrix, options]` возвращает нормированную матрицу, где элементы \mathbf{a}_j каждого столбца исходной матрицы отображаются в элементы нормированной матрицы $\bar{\mathbf{a}}_j$, которые находятся в интервале $[0, 1]$. Максимальный по значению элемент j -го столбца \mathbf{a}_j линейно отображается в единицу, минимальный элемент столбца \mathbf{a}_j — в нуль по формуле $\bar{a}_{ij} = (a_{ij} - \min(\mathbf{a}_j))(\max(\mathbf{a}_j) - \min(\mathbf{a}_j))^{-1}$. Дополнительными параметрами являются вектор наилучших значений `Ideal` и параметр центрирования `Center`. Вектор наилучших значений является набором элементов, каждый из которых принимает значение из множества $\{0, 1\}$. Каждому столбцу матрицы исходных данных поставлен в соответствие элемент вектора наилучших значений. Если элемент принимает значение нуль, то минимальный элемент столбца линейно отображается в единицу, а максимальный — в нуль, согласно формуле $\bar{a}_{ij} = 1 - (a_{ij} - \min(\mathbf{a}_j))(\max(\mathbf{a}_j) - \min(\mathbf{a}_j))^{-1}$. Если значение параметра центрирования `Center` определено как `True`, то каждый столбец матрицы линейно отображается так, что среднее арифметическое элементов j -го столбца равно нулю, $\bar{a}_{ij} = a_{ij} - m^{-1} \sum_{i=1}^m a_{ij}$. Пример: `An=ColumnNormalize[{{1,4},{3,2}}, Ideal->{0,1}, Center->True]`.

Функция `MinkowskiDistance[matrix, k]` возвращает вектор, каждый элемент которого является k -нормой соответствующей вектор-строки данной мат-

рицы, см. [10]. Значение k должно находиться в области положительных действительных чисел. Для того, чтобы найти взвешенную норму вектора \mathbf{a}_i , исходную матрицу A следует умножить слева на вектор весов \mathbf{w} . Алгоритм работы функции описан в разделе 1.2.1. Пример: `q=MinkowskiDistance[A, 2]`.

Функция `PrincipalComponents[matrix]` возвращает значения главных компонент (ГК). Первая строка возвращаемого списка есть первая ГК исходной матрицы. Элементы матрицы `matrix` должны принадлежать множеству действительных чисел. Функция преобразует исходную матрицу так, что ковариационная матрица матрицы ГК является диагональной и содержит на диагонали невозрастающую последовательность компонент. Исходная матрица центрируется. Дополнительным параметром является параметр `AllComponents`. Если значение `AllComponents` \rightarrow `False`, то функция возвращает только первую ГК (установлено по умолчанию). Алгоритм работы функции описан в разделе 1.2.2. Пример: `q=PrincipalComponents[An, AllComponents \rightarrow True][[1]]`.

Функция `SingularComponents[matrix]` возвращает проекцию всех вектор-строк исходной матрицы на ось, соответствующую наибольшему сингулярному числу. Исходная матрица A преобразуется таким образом, что все вектор-строки находятся в положительном ортанте. Алгоритм работы функции описан в разделе 1.2.3. Пример: `q=SingularComponents[An]`.

Функция `ParetoClassify[matrix]` возвращает вектор, значение каждого компонента которого есть номер слоя расслоения Парето, в котором находится соответствующая вектор-строка исходной матрицы. При расслоении, внешний слой получает максимальный номер, соответствующий количеству строк исходной матрицы, а внутренний слой получает номер один. Алгоритм работы функции описан в разделе 1.2.4. Пример: `q=ParetoClassify[A]`.

Для функций `AlphaConcordance`, `GammaConcordance` и `TauConcordance`, выполняющих алгоритмы согласования экспертных оценок, разработан специаль-

ный формат хранения данных `triplet`, описывающий тройку $\{\mathbf{w}_0, \mathbf{q}_0, A\}$, где первая строка и первый столбец — экспертные оценки соответственно весов показателей \mathbf{w}_0 и интегральных индикаторов \mathbf{q}_0 . Вторая строка — назначенный экспертами идеальный вектор \mathbf{i}_0 , указывающий, на то, какие значения показателей являются лучшими при оценке данного объекта — более высокие или более низкие. Остальная часть таблицы — матрица данных A .

Функция `UnpackData[data]` возвращает множество $E = \{\mathbf{w}_0, \mathbf{i}_0, \mathbf{q}_0, A\}$, где \mathbf{w}_0 — экспертные оценки показателей, \mathbf{i}_0 — описание показателей наилучшего объекта, \mathbf{q}_0 — экспертные оценки объектов, A — матрица исходных данных. Данная функция предназначена для распаковки внешних импортируемых данных с целью предварительной обработки и формирования троек `triplet`. Пример использования функции в контексте работы с библиотекой `Concordance`:

```
<< Custom'Concordance'
data=Import["c://zapovedniki//ohrana.dat", "Table"];
{w0, i0, q0, A}=UnpackData[data];
An=ColumnNormalize[A, Ideal→i0, Center→False];
Triplet={w0, q0, An};
```

Функция `AlphaConcordance[triplet, alpha, options]` возвращает список, состоящий из двух векторов: $\{\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha\}$. Исходными данными для функции являются тройка `triplet` и параметр `alpha`, настраиваемый экспертами. Дополнительным параметром является `Print`, значение которого по умолчанию равно `False`. В случае `Print→True` функция печатает отчет о ходе процедуры согласования. Алгоритм работы функции описан в разделе 2.2.1. Пример: $\{\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha\} = \text{AlphaConcordance}[\text{Triplet}, 0.5, \text{Print} \rightarrow \text{True}]$.

Функция `GammaConcordance[triplet, alpha, options]` возвращает список, состоящий из двух векторов: $\{\mathbf{w}_\gamma, \mathbf{q}_\gamma\}$. Исходными данными для функции являются тройка `triplet` и параметр `gamma`, настраиваемый экспертами. Дополни-

тельным параметром является `Print`, значение которого по умолчанию равно `False`. В случае `Print`→`True` функция печатает отчет о ходе процедуры согласования. Алгоритм работы функции описан в разделе 2.2.2. Пример: `{wg, qg}=GammaConcordance[Triplet, 1.]`.

Функция `TauConcordance[triplet, alpha, options]` возвращает список, состоящий из двух векторов: $\{\mathbf{w}_T, \mathbf{q}_T\}$. Исходными данными для функции являются тройка `triplet`. Алгоритм работы функции описан в разделе 2.3.1. Пример: `{wt, qt}=TauConcordance[Triplet]`.

Для проверки целостности данных в библиотеку включены функции `NumericMatrixQ[matrix]` и `ConcordanceTripletQ[triplet]`, возвращающие значения `True` или `False` в зависимости от того, соответствует структура входных данных объявленной ранее структуре или нет.

Для отчета о ходе процедур согласования в библиотеку включены функции `AlphaPlot`, `GammaPlot` и `MultiPlot`, показывающие на экране графическую информацию.

Для проверки работы библиотеки были включены функции `MakeExpert` и `MakeData`, генерирующие тестовые данные, соответствующие принятым ранее моделям порождения данных.

3.2 Модель управления заповедниками

На сегодняшний день в России работают сто государственных природных заповедников. Заповедник — самая строгая форма охраны природных территорий.

“Особо охраняемые природные территории (ООПТ) — это территориальная форма охраны природы, исключая, строго ограничивающая или четко регламентирующая любые формы прямого использования природных ресурсов, обеспечивающая сохранение и восстановление различных форм биологического разнообразия, природ-

ной и природно-культурной среды как при естественном ходе природных процессов, так и при специальных управляющих воздействиях, необходимых и достаточных для достижения поставленных целей.”

В. В. Дежкин, Ю. Г. Пузаченко, [13]

Рассматривается модель управления особо охраняемых природных территорий (ООПТ) с обратной связью, включающая двух участников процесса управления — субъект и объект. Субъект управления назначает цели управления и в соответствии с этими целями и с состоянием объекта, выбирает один из множества допустимых вариантов управления. Во время процесса управления производится мониторинг показателей объекта управления. Результатом мониторинга являются данные, зависящие от состояния объекта, причем вид зависимости известен. Описанная модель использует данные ежегодных отчетов заповедников и экспертные оценки состояния заповедников.

Особенность рассматриваемой модели заповедника состоит в том, что непосредственное управление объектом недопустимо, и поэтому в качестве объекта управления рассматривается не ООПТ, а источник негативного воздействия на нее. Управление самой природной территорией производится косвенно, через ее охрану от антропогенных воздействий. Субъект управления не может прямо влиять на состояние охраняемой природной территории и главная его цель — обеспечение защиты природной территории от антропогенных воздействий.

Схема анализа охраны ООПТ от антропогенных воздействий строится следующим образом.

1. Составляется систематизированный перечень воздействий и собирается информация об источниках воздействий.
2. Производится оценка влияния воздействий на состояние ООПТ.
3. Каждому воздействию ставятся в соответствие оптимальные, в некотором

смысле, ответные меры по защите от воздействия.

4. По отчетам заповедников оценивается эффективность их работы как совпадение принятой руководством меры с оптимальной мерой.

Так же выглядит схема профилактической охраны ООПТ по защите от воздействий, которые могут появиться в ближайшем будущем. Антропогенные воздействия в этом случае называются угрозами.

Экспертами был принят список, использовавшийся для экспресс-оценки эффективности управления заповедником, см. [30]: туризм (на территории заповедников туризм не разрешен) [15]; охота и лов рыбы; рубки леса; сбор дикоросов — ягод и грибов; сельское хозяйство и другие технологические нарушения заповедного режима; загрязнение, как импактное, так и фоновое; поселения на территории и вблизи территории заповедника; водопользование и пользование недрами; катастрофы.

Задача управления сводится к выбору оптимальной меры по защите от воздействия, в зависимости от данных о состоянии самого заповедника и оценки влияния воздействия на заповедник.

Рассмотрим модель управления заповедником, построенную на основе модели, описанной В. В. Шакиным в [54]. На диаграмме (3.1) показана функциональная схема модели управления для одной природной территории. Модель определена, если определены все элементы, из которых она состоит. Данная модель состоит из пяти элементов: модели принятия решения, модели источника воздействия на ООПТ, модели состояния ООПТ, модели порождения данных, модели оценки результатов наблюдений.

$$\begin{array}{ccc}
 u = \arg \operatorname{opt}_u C(u, \hat{x}, \hat{z}) & \xrightarrow{u} & z' = H(z, u), x' = F(x, z) \\
 \hat{x}, \hat{z} \uparrow & & x, z \downarrow \\
 \hat{x} = G_x^+(y), \hat{z} = G_z^+(y) & \xleftarrow{y} & y = G(x, z)
 \end{array} \tag{3.1}$$

Обозначения на вышеприведенной диаграмме:

$x \in X$ — текущее состояние ООПТ, определенное на множестве состояний. Также состояние ООПТ $x \in X \supset N$, где N — экологическая ниша или норма жизни экосистемы, см. [49];

$y \in Y$ — результаты мониторинга ООПТ, вектор в пространстве показателей ежегодных отчетов заповедников;

$u \in U$ — управление, выбранное из множества допустимых вариантов управления;

$C(u, \hat{x}, \hat{z})$ — модель принятия решения: критерий качества управления заповедником, зависящий от ее состояния x и выбираемого управления u . Качество управления также определяется заданной целью управления;

$z' = H(z, u)$ — модель источника воздействия: описание связи между управлением u , состоянием источника воздействия z и изменением состояния источника воздействия z' ;

$x' = F(x, z)$ — модель заповедника: описание связи между воздействием z , состоянием природной территории x и изменением состояния природной территории x' ;

$y = G(x, z)$ — модель порождения данных: описание связи между внутренним состоянием ООПТ, воздействиями на ООПТ и результатами мониторинга.

Математическая модель задана, если определены её элементы $x, x', z, z', y, u, C, F, G, H$. В данной математической модели большое место уделяется экспертным суждениям и оценкам. Условно эксперты были поделены на две группы: эксперты-аналитики и эксперты-синтетика. Методика работы экспертных групп более подробно описана в [43]. Эксперты принимали участие в построении следующих элементов модели:

1. Принятие управленческого решения \hat{u} : эксперты-синтетика.
2. Участие в выработке согласованной оценки состояния ООПТ и воздей-

ствий \hat{x} , \hat{z} : эксперты-синтетики.

3. Оценка весомости показателей состояния ООПТ, оценка влияния воздействий на состояние заповедника: эксперты-аналитики.
4. Построение и идентификация модели порождения данных G : эксперты-аналитики.
5. Оценка эффективности управления заповедником C : эксперты-аналитики.

Очевидно, что определить такие множества, как множество состояний заповедника X или множество антропогенных воздействий Z на территорию заповедника весьма сложно. Поэтому, при построении модели заповедника, там, где это необходимо, применялись экспертные суждения. Принятие управленческого решения также выполнялось экспертами, и, следовательно, нет необходимости в построении сложных пространств состояний объекта управления. Для принятия решения удобнее строить интегральные показатели состояния заповедника. Таким образом, оценки \hat{x} , \hat{z} — интегральные показатели, соответствующие объективному состоянию заповедника x и объективным воздействиям на территорию заповедника z . Значения этих объективных величин могут быть доступны косвенно, через мониторинг состояния ООПТ в виде измеряемых показателей y . Допуская, что значения измеряемых показателей y зависят от состояния ООПТ x и воздействий z , и вид зависимости G известен, можно построить оценки \hat{x} , \hat{z} .

Выбор управляющего воздействия u зависит от целей [42], ресурсов, и состояния заповедника $u = \arg \text{opt}_{u \in U} C(u, \hat{x}, \hat{z})$. Главная цель заповедника — минимизировать воздействие z . Этой целью и имеющимися ресурсами определяется множество управленческих решений U . Из этого множества выбирается одно решение, или мера по пресечению воздействия u . Охрана заповедников есть управление по воздействию. Каждому воздействию и каждой угрозе для заповедника поставлен в соответствие набор мер. Управляющее воздействие изменяет состо-

яние заповедника x таким образом, что его состояние стремится к некоторому оптимальному состоянию. Эффективность управления заповедником оценивается. Годовой цикл контроля над деятельностью заповедников заключается в следующем. Есть множество z зарегистрированных воздействий на заповедник и множество u мер, принятых руководством заповедника. Эти два множества представлены в годовом отчете работы заповедника. Эффективность управления заповедником оценивается посредством анализа адекватности воздействий и принятых мер.

В каждом заповеднике в течение года собираются данные о состоянии заповедника и о воздействиях на него. Эти данные отражены в ежегодном отчете о работе заповедника, летописи природы, научных статьях и отчетах. Оценка состояния \hat{x} заповедников в рассмотренной модели есть набор четырех интегральных индикаторов $\mathbf{q}_B, \mathbf{q}_O, \mathbf{q}_H, \mathbf{q}_T$:

- Природоохранная ценность заповедника (биоразнообразие)
- Отчет о работе службы охраны заповедника
- Отчет о научной деятельности заповедника, научные публикации
- Отчет о просветительской деятельности заповедника

На основании полученных оценок выбирается оптимальное, в некотором смысле, управляющее воздействие u , которое изменяет состояние x заповедника.

В работе [2] предлагается иерархическая система построения интегрального индикатора, которую мы приняли при построении описываемой модели. Интегральный индикатор \hat{x} строится следующим образом. Измеряемые показатели y , декларированные зависимыми от состояния заповедника x объявляются показателями базового уровня (см. рис. 2). Эти показатели приводятся к единой шкале для дальнейшего сопоставления.

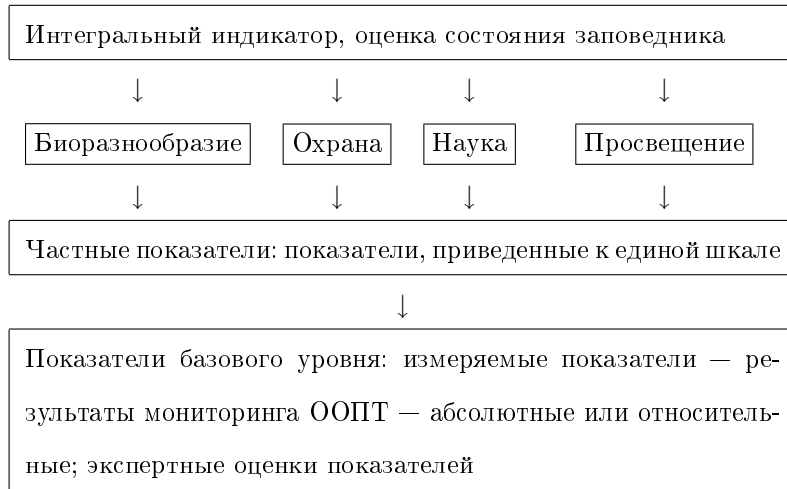


Рис. 2: Иерархическая система интегральных индикаторов

После построения иерархической системы показателей можно приступить к вычислению интегрального индикатора состояния заповедника первого и второго уровня. Интегральный индикатор первого уровня есть оценка состояния заповедника, в нашем случае $\hat{x} = G_x^+(y)$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^1$, где G_x^+ — псевдообратный оператор для $G(x)$ (см. (3.1)). Интегральные индикаторы второго уровня — это представление интегрального индикатора первого уровня в векторном виде. Такое представление более информативно, так как оно отображает отдельные виды деятельности заповедника. Например, на рис. 2, первый интегральный индикатор — природоохранная ценность заповедника, второй — оценка работы службы охраны заповедника, третий — оценка научной работы заповедника, и четвертый — оценка просветительской работы заповедника. Вектор оценки состояния заповедника \hat{x} вычисляется подобным образом: $\hat{x} = G_x^+(y)$, $x \in \mathbb{R}^4$, где G_x^+ — псевдообратный оператор для $G(x)$. Для принятия управленческого решения экспертам могут быть предложены показатели как первого, так и второго уровня. Аналогично вычисляется интегральный индикатор оценки воздействий на заповедник \hat{z} .

3.3 Описание исходных данных

В рамках данной работы была построена база данных о состоянии и деятельности заповедников России [60]. В частности, в неё вошли следующие разделы из сборника ежегодных отчетов заповедников за 1995-2000 годы:

1. Работа службы охраны в заповедниках
2. Отчет о научной работе заповедников
3. Эколого-просветительская деятельность заповедников
4. Финансирование заповедников
5. Кадровый состав заповедников
6. Лесные и степные пожары в заповедниках
7. Хозяйственная деятельность заповедников
8. Общие сведения о заповедниках

При экспертной оценке работы заповедников использовались первые три раздела сборника за 1999-2000 гг., как описывающие основные задачи, возложенные на государственные природные заповедники [15]. В связи с большим объемом материала, в данную работу вошла только часть исходных данных и полученных результатов. Полная версия базы данных представлена в электронном виде, а также в документе «Проект ГЭФ «Сохранение биоразнообразия». Ежегодные отчеты о работе государственных заповедников России».

На сегодняшний день в базе данных 31 отчет каждого из ста заповедников, в одном отчете от 17 до 136 показателей. В данной работе будет рассматриваться только отчет «Эффективность работы службы охраны заповедников» за 1999 год.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0	0	0	0	21	5	0	0	5	4	613	408.67	500	400	264.667	101.556	1	0	0
2	0	0	0	0	41	0	1	0	0	0	322.67	230.22	133.3	177.78	27.3333	18.2222	6	1	6
3	0	0	0	0	31	18	1	0	13	0	20189	3607.1	4003	2137.8	168.667	21.5556	0	2	6
4	1	5	3	13	24	9	1	0	3	21	3209	3078.7	0.333	0.4444	983.333	434.222	0	5	1
5	1	7	4	32	39	7	1	24	0	23	3619	2468.7	9408	6272.2	125.333	64.2222	0	2	0
6	0	0	0	6.5	17.5	0	1	15	0	12	1233.3	1644.4	200	266.67	160.333	213.778	0	0	0
7	0	0	0	0	15	9	1	16	9	6	111.33	74.222	28	37.333	5.66667	4.88889	0	2	0
8	0	0	0	0	6	1	1	0	0	0	2714.5	1414.5	13575	12775	65	35	2	0	2
9	0	0	0	0	21	9	1	0	0	16	2500	1200	506.3	329.11	255	151.333	0	2	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	9	3	0	25	0	0	2840	773.33	638	425.33	99.6667	20.4444	0	1	1
13	0	0	0	0	17	6	1	0	0	15	2983.3	677.78	4245	5392.9	103.667	26.8889	1	7	0
14	0	0	0	0	4	3	0	0	0	0	884.67	1179.6	0	0	55.3333	73.7778	2	3	0
15	0	0	0	0	6	3	1	0	0	0	566.67	422.22	0	0	246.667	112.222	0	1	0
16	0	0	0	0	12	5	0	0	2	0	5400	5066.7	2000	2666.7	253.333	238.444	0	5	0
17	0	0	0	0	9	6	0	16	0	0	0	0	5333	7111.1	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	15	0	1	0	0	16	83.5	83.5	192	192	250.5	250.5	1	1	1
19	0	0	0	0	8	2	1	0	10	3	4221.3	1614.2	0	0	170.667	82.8889	1	7	2
20	1	0	0	6	9	0	0	0	1	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	16	2	1	29	6	0	793.33	457.78	1667	2222.2	209.667	67.1111	0	0	0
22	0	0	0	0	16	0	1	0	6	3	18187	4342.2	871.3	514.22	283	102	0	1	0
23	0	0	0	0	53	6	1	16	21	4	16041	2740.9	4722	1292.4	102	6	0	7	2
24	0	0	0	0	21	1	1	0	0	0	4032.3	2144.2	2573	1382	127	40.6667	0	2	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	16	4	1	0	0	8	1946	646	0	0	334.5	98.5	0	0	1
27	0	0	0	0	18	1	1	0	12	15	9151	4532	5925	1650	282.333	80.4444	0	0	2
28	0	0	0	0	37	1	1	18	2	3	17748	3376.9	5055	1436.4	178.333	19.7778	2	47	5
29	0	0	0	0	8	6	1	0	0	10	1549	166	0	0	93.3333	8.88889	0	1	0
30	1	2	4	14	20	1	1	0	0	10	423.33	564.44	0	0	38.6667	51.5556	1	0	1
31	0	0	0	0	13	0	1	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	1	3	2	11	22	10	1	25	13	0	970	369.33	61.33	40.889	78.3333	23.1111	0	0	0
33	1	2	0	12	17	3	1	11	3	6	450.33	333.11	39.67	52.889	81.3333	16.4444	0	1	0
34	1	0	0	22	27	6	1	0	0	0	425	433.33	1267	1688.9	26.6667	13.5556	0	0	0
35	1	13	15	47	78	6	1	71	0	72	6914.3	948.44	3906	3764.7	183.667	16.2222	5	12	4
36	1	2	0	6	9	0	1	0	14	0	3813.3	2124.4	0	0	205.333	93.5556	0	1	2
37	1	4	0	18	22	0	0	0	0	7	946.33	1205.8	1143	1261.8	256.667	244.889	0	1	0
38	1	5	1	30	39	3	1	0	0	22	572.33	451.78	0	0	75	36	0	2	0
39	1	2	3	8	17	5	1	21	0	0	2129.7	707.11	3146	929.56	111	28	0	3	1
40	1	2	1	2	5	0	1	0	1	2	7080.7	1618.9	1287	614.89	123	28.6667	0	0	0
41	1	1	2	2	11	5	1	13	0	0	10018	0	0	0	1518	0	0	0	0
42	1	0	0	13	24	0	1	25	1	2	8105.7	7262.9	12867	12089	113	40	1	0	1
43	1	0	2	4	8	0	0	0	0	0	1194.7	740.44	0	0	528.333	209.111	0	1	0
44	1	3	2	1	6	3	1	0	0	0	5306.3	995.78	282.7	310.22	125.333	40.4444	0	0	0
45	1	3	2	16	35	6	1	32	2	11	2717.7	1251.8	0	0	665.667	257.111	1	1	1
46	1	4	1	20	30	3	1	27	0	27	13058	8099.8	14048	18563	379	109	2	4	1
47	1	2	5	12	18	3	1	0	3	2	47697	36868	68123	66758	1447.33	846.444	0	2	1
48	1	4	0	25	34	4	1	23	0	26	21839	1426	2427	2448.9	326.333	83.5556	14	15	4
49	0	1	4	17	24	1	0	21	8	6	1849.7	799.56	230314	228286.5	126.667	72.8889	0	2	0
50	1	1	0	5	11.5	2	0	5	0	0	1541	741	1213	883.56	109.333	52.4444	0	0	0

окончание таблицы на следующей странице

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
51	1	4	0	15	26	6	0	0	1	21	526.67	368.89	2500	3333.3	85	63.3333	0	1	0
52	1	3	2	20	26	4	1	0	0	27	6257.3	1028.4	7082	8345.6	320	70	3	12	0
53	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3	400	0	0	0	589	0	0	0	0
54	0	1	2	11	15	3	1	0	0	23	5015.7	4322.9	66.67	88.889	500	452.667	0	0	0
55	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	500	0	0	0	83	0	1	0	0
56	1	2	8	0	11	2	1	0	0	5	3657	1362	989.3	1052.4	58	30.6667	0	1	0
57	1	0	0	4	5	3	0	0	0	7	2560.3	2913.1	1995	2542.4	287.667	327.556	0	4	0
58	1	5.5	6	26	39	6	1	15	0	10	2222.7	496.89	6855	4645.5	121	21.3333	0	2	4
59	0	1	1	10	14	1	0	0	0	0	83.333	111.11	0	0	83.3333	111.111	1	0	1
60	1	4	3	10	17	0	1	0	0	18	349	154	0	0	105.667	40.8889	0	0	0
61	1	0	1	2	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
62	1	0	0	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
63	1	3	3	19	31	1	1	0	0	4	355.33	363.11	300	400	130	113.333	0	0	2
64	1	2	4	6	20	3	0	0	4	12	1409.7	1193.6	0	0	252.333	108.222	0	0	0
65	1	2	3	9	13	4	1	0	0	0	953	397.33	692.7	461.78	93.3333	87.1111	2	1	0
66	1	1	2	4	13	1	1	0	0	0	11200	10400	0	0	706	470.667	0	2	0
67	0	0	2.5	11	15.5	3	1	18	1	4	2297	1130.7	2050	2050	222.733	145.022	0	0	0
68	1	1	2	6	10	2	1	0	6	0	601	267.33	266.7	355.56	6.85667	5.42889	0	0	0
69	1	1	1	9	18	1	1	12	0	0	961	748	0	0	262.667	158.222	0	2	0
70	1	1	3	5	9	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
71	1	1	2	10	13	0	1	0	0	0	400.33	266.89	162	138	71.5	39.5	0	0	0
72	1	1	1	4	8	2	1	0	0	1	166.67	222.22	0	0	166.667	54.2222	0	0	0
73	1	4	1	15	21	9	1	22	8	24	1402.7	731.56	0	0	592.333	296.889	3	1	1
74	1	6	2	28	44	8	1	18	3	26	12265	1868.9	0	0	331.333	52.4444	2	9	0
75	1	3	1	25	26	0	1	26	2	18	2558.3	1208.4	2588	1725.3	130.333	23.7778	5	3	3
76	0	0	0	0	21	3	1	0	8	26	1023.3	764.44	266.7	355.56	157.667	48.2222	3	3	2
77	1	3	0	13	25	9	1	0	4	5	75700	42000	14900	13900	503	65	2	3	9
78	1	6	5	8	22	14	1	0	0	16	5391.7	3684.2	0	0	686.333	532.444	0	0	0
79	1	5	6	36	53	3	1	33	4	26	2544.3	343.78	4101	1867.1	135.667	54.2222	1	2	1
80	1	0	0	8	8	2	1	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
81	1	0	2	7	9	1	1	0	2	10	2497.7	2195.6	1586	2114.2	401	354.667	1	2	0
82	1	1	1	5	10	4	1	0	0	19	3475	1473.3	0	0	558.333	155.556	1	0	0
83	1	1	3	13	24	5	1	12	0	12	10730	1692.9	5173	5884.4	137.333	29.5556	0	20	0
84	0	4	5	10	21	5	1	11	2	25	4183.3	325.11	1091	498	112	6.66667	1	3	2
85	1	7	2	22	30	2	1	0	23	10	2383.3	144.44	817.7	478.44	214	79.3333	0	3	3
86	1	3	0	10	20	0	0	0	0	0	1977.3	430.22	17560	23413	327.333	97.1111	0	2	0
87	1	1	4	9	17	1	1	0	2	20	666.67	688.89	0	0	358.333	416.444	0	0	0
88	1	1	1	11	14	4	1	0	9	9	7367.3	3089.8	1444	1837.6	130.667	48.4444	1	5	2
89	1	2	2	13	18	1	1	0	0	3	19589	5088.5	80480	1820	113.5	27.5	0	19	5
90	1	2	0	7	11	0	1	13	0	0	550	566.67	0	0	214	135.333	0	0	0
91	1	2	4	16	23	6	1	0	0	0	566.67	555.56	0	0	96	64	0	0	0
92	1	0	3	7	15	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
93	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
94	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
95	0	0	0	0	17	4	0	0	0	0	86800	0	10949	0	1157	0	0	0	0
96	0	0	0	0	26	0	0	0	0	0	1920	0	0	0	320	0	0	0	0
97	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	2500	0	1700	0	320	0	0	0	0
98	0	0	0	0	16	0	0	0	0	0	14759	2441	0	0	289	6	0	0	0
99	0	0	0	0	76	2	1	0	0	0	5350	4250	2150	1050	978	622	1	0	1
100	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2: Данные ежегодного отчета заповедников. Раздел “Охрана”

В таблице 2 приведены данные ежегодного отчета о работе службы охраны заповедников. Таблица содержит 19 базовых показателей, по которым отчитывается каждый из ста заповедников. В первой колонке таблицы указан порядковый номер заповедника. В остальных колонках указаны значения показателей заповедников. Таким образом, каждая строка таблицы содержит показатели отчета соответствующего заповедника. Названия заповедников и показателей см. в таблицах 3 и 5.

Данные таблицы 2 использовались при нахождении интегрального индикатора “без учителя”, см. раздел 1.2. Для согласования данных ежегодных отчетов и мнений экспертов, в разделе 2 кроме приведенных данных A использовались экспертные оценки $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$.

3.4 Получение экспертных оценок

Для оценки эффективности управления заповедниками экспертам был предложен специально составленный сборник анкет [59]. В данном сборнике экспертам предлагалось дать оценку эффективности работы заповедника по различным критериям (охрана, наука, просвещение, работа директора), а также сравнить заповедники друг с другом. Помимо этого, экспертам предлагалось сделать самооценку осведомленности о работе заповедника.

В каждой анкете сборника приведен список заповедников. В первых трех колонках списка находятся названия заповедников России, в четвертой колонке находятся названия национальных парков. В рамках выполняемого проекта сначала необходимо было дать оценку заповедников Кавказского региона, которые были выделены жирным шрифтом. На обороте каждой анкеты приведено руководство по её заполнению. Если эксперт затруднялся в оценке некоторого заповедника, то данную графу разрешалось пропустить. Если эксперт затруднялся в оценке всех заповедников по некоторому интегральному индикатору, то

данную анкету разрешалось пропустить. Эксперт мог выбрать один из способов оценивания заповедников или назначить свою шкалу оценок. При назначении собственной шкалы эксперту рекомендовалось определить, что он понимает под каждым из баллов своей шкалы оценок. Экспертам были предложены:

1. Десятибалльная шкала оценки, при этом максимальный балл — 10 баллов.
2. Оценка по пятибалльной системе как в школе (пример для оценки работы службы охраны): 5 — служба охраны работает отлично, 4 — служба охраны работает хорошо, 3 — служба охраны работает удовлетворительно, 2 — служба охраны есть, но работает из рук вон плохо, 1 — службы охраны нет.
3. Категории по общему впечатлению: 1 — лучшие, 2 — средние, 3 — худшие.
4. Собственная шкала.

Для задания собственной шкалы эксперту необходимо было определить наилучшую оценку g^{max} и наихудшую оценку g^{min} . В качестве собственной шкалы эксперты выбирали стобалльную шкалу.

В таблице 3 приведен список заповедников, где напротив каждого заповедника эксперт мог поставить оценку по назначенной им шкале. В дальнейшем, при анализе данных название заповедника будет опущено, и ссылкой на конкретный заповедник является номер заповедника в графе “№” данной таблицы.

Для уточнения и проверки непротиворечивости выставленных оценок экспертам была предложена для каждого интегрального индикатора матрица парных сравнений заповедников. Мощность допустимого алфавита была четыре: $\{0, =, +, -\}$. При заполнении матрицы эксперт выполнял следующую инструкцию:

1. Если ООПТ не сравнимы, поставьте “0” на пересечении вертикали и горизонтали.

№	Заповедники	Эксп.1	Эксп.2	Эксп.3	Эксп.4	Эксп.5	Эксп.6
1	Азас			3	3		
2	Алтайский	3		2	6		
3	Астраханский	2			8		
4	Байкало-Ленский				8		
5	Байкальский	3	5		5	4	
6	Баргузинский	1			6	3	
7	Басеги	2			4		
8	Бастак	3			3		
9	Башкирский	1			5		52
10	Богдинско-Баск.	2			3		
11	Болоньский	3			3		
12	Большая Кокшага	3			5	5	70
13	Большехецирский	2			6		
14	Большой Аркт.	1			5		
15	Ботчинский	3			7		
16	Брянский лес	3			10	5	60
17	Буреинский				6		
18	Верхне-Тазовский				7		
19	Висимский	1			4		
20	Витимский	2			4		
21	Вишерский	1			5		
22	Волжско-Камский	2	5	1	10		
23	Воронежский	3		3	9		
24	Воронинский	3			5		
25	Гыданский				?		
26	Дагестанский	2			4		
27	Дарвинский	2		2	6		
28	Даурский	3			5		
29	Денежкин Камень				3		
30	Джергинский	2			5	3	
31	Джугджурский				1		
32	Жигулевский	3		3	4		
33	Зейский	2		3	5		
34	Кабардино-Балк.				3		
35	Кавказский	3	3	2	5	4	
36	Калужские Засеки	2		3	5		
37	Кандалакшский	2	4	1	9		
38	Катунский	2			8		
39	Керженский	2	5	1	8	5	
40	Кивач	1		2	6		
41	Командорский	1			3		
42	Комсомольский	2			4		
43	Корякский	2			5		
44	Костомукшский	2		1	7		65
45	Кроноцкий	2			7		
46	Кузнецкий Алатау	1			3	3	
47	Курильский	3			7		
48	Лазовский	3		1	7		
49	Лапландский	3		1	9		92
50	Лес на Ворскле	2			5	4	
51	Магаданский	2			7		
52	Малая Сосьва				4		
53	Малый Абакан	2		2	5		
54	Мордовский	1		1	6		
55	Ненецкий	2			5		
56	Нижнесвирицкий	2			6		70
57	Нургуш	2			5		
58	Окский	2		2	7	4	
59	Олекминский				4		
60	Оренбургский	2			4		
61	Остров Врангеля	2		3	6		
62	Пасвик	2		2	6		65
63	Печоро-Илычский	2		3	4		
64	Пинежский				4		
65	Полистовский	2		2	3		
66	Поронайский	2			3		
67	Приволжская Лес.	2		2	7		
68	Приокско-Террасный	1		2	8		
69	Присурский	1			6		
70	Путоранский				5		
71	Рдейский	1			4		
72	Ростовский				7		
73	Саяно-Шушенский	3		3	8	3	
74	Северо-Осетинский		5		4		
75	Сихоте-Алинский	2		2	6		
76	Сохондинский				6		
77	Столбы	2		2	5		
78	Таймырский				5		
79	Тебердинский	2		2	8	4	
80	Тунгусский				4		
81	Убсунурская котл.				7		
82	Усть-Ленский				3		
83	Ханкайский				6		
84	Хинганский				7		
85	Хоперский	3		3	6		
86	Ц.-Лесной	2		2	6		
87	Ц.-Сибирский	3		3	1	1	
88	Ц.-Черноземный	1		1	7		
89	Чазы (Хакасский)	2		2	5		
90	Черные Земли	2			4		
91	Шульган-Таш	3			4		60
92	Юганский	2		2	6		
93	Тигирекский						
94	Галичья гора						
95	Дальн. морской	2					
96	Ильменский	3		3			
97	Кедровая падь						
98	Уссурийский	2		2			
99	Южно-Уральский						
100	Норский						

Таблица 3: Экспертные оценки объектов. Раздел "Охрана"

Заповедники		9	12	16	44	49
		Башкирский	Большая Кокшага	Брянский лес	Костомукшский	Лапландский
9	Башкирский	=	-	-	-	-
12	Большая Кокшага	+	=	+	+	-
16	Брянский лес	+	-	=	-	-
44	Костомукшский	+	-	+	=	-
49	Лапландский	+	+	+	+	=

Таблица 4: Матрица парных сравнений объектов, пример

2. Если ООПТ равны, поставьте знак “=” на пересечении вертикали и горизонтали.
3. Если ООПТ на горизонтали лучше ООПТ на вертикали, поставьте знак “+”.
4. Если ООПТ на горизонтали хуже ООПТ на вертикали, поставьте знак “-”.

Матрица имела небольшую размерность, так как известно, что эксперту удобно заполнять матрицу, в которой не более 10-12 строк и столбцов [37]. В таблице 4 приведена одна из матриц парного сравнения, заполненная экспертом для проверки непротиворечивости оценок. Пример, показанный в данной таблице содержит пять попарно сравниваемых объектов. Все эксперты условно были поделены на экспертов-синтетиков и экспертов-аналитиков. В первую группу вошли те, кто выставял интегральную оценку объектов. Во вторую группу вошли те, кто оценивал веса или важность базовых показателей. Оценка весов показателей, характеризующих работу заповедника, необходима для формирования результатов по ежегодным отчетам заповедников. Каждый из пунктов анкеты, заполняемой аналитиками, является измеряемым или объективным показателем. Также для

№	Показатель отчета о работе заповедника	Эксперт1	Эксперт2	Эксперт3	Эксперт4	Эксперт5	Эксперт6	Эксперт7	Эксперт8	Эксперт9
1	В штате - есть заместитель директора по охране	1	100	5	12	3	5	10	5	100
2	В штате - старших госинспекторов	2	60	3	16	3	5	8	4	60
3	В штате - участковых госинспекторов	2	60	3	16	3	5	8	4	60
4	В штате - госинспекторов	1	95	4	16	4	5	8	4	95
5	В штате - всего чел.	1	90	4	18	3	3	10	3	90
6	Внештатн. Инспекторы - всего чел.	1		5	12	4	4	7	2	
7	Число опергрупп (есть опергруппа)	2	100	5	12	4	5	10	3	100
8	Всего человек в опергруппах	2	70	5	14	3	5	10	3	70
9	Взыскано штрафов, руб.	1	80	5	5	5	5	10	2	80
10	Взыскано иск., руб	1	80	5	4	5	5	10	2	80
11	Средний размер штрафа, руб	2	45	5	9	4	3	5	3	45
12	Изъято оружия нарезного	1	40	5	6.5	5	5	10	2	40
13	Изъято оружия гладкоствольного	1	40	5	6.5	5	5	10	2	40
14	Загрязнение, захват земли и строительство	1	70	4	8	5	5	10	1	70
15	Нет показателей для данного заповедника	2	100	5	1			1	1	100
16	В том числе (Сплошь) безличка	1	90	5	2	5		2	1	90
17	Нет штрафов для данного заповедника	2	100	5	10	4	5	10	1	100
18	Нет (взыскания) исков	2	100	5	3	4	5	10	1	100
19	Привлечено к уголовной ответственности	1	80						1	80

Таблица 5: Экспертные оценки весов показателей. Раздел “Охрана”

оценки важности показателей эксперту предлагалось построить модель зависимости одних показателей от других и выбрать наиболее значимые показатели, см. [5].

Все базовые показатели были разделены на три группы: показатели, относящиеся к работе службы охраны заповедника, показатели, относящиеся к просветительской деятельности заповедника и показатели, относящиеся к научной деятельности заповедника. Всего эксперты оценивали 19 показателей. Список показателей и оценки, выставленные экспертами, приведены в таблице 5. В дальнейшем название показателя будет опущено, и ссылкой на конкретный показатель будет являться его номер в графе “№”. Процедура согласования экспертных оценок, описанная в данной работе, использовала в качестве исходных данных оценки объектов и показателей одного эксперта. В случае работы группы экспертов находилась общая оценка для всей группы с помощью следующей проце-

дуры.

Имеется m объектов и k экспертов. Каждый эксперт выставляет некоторым объектам оценки $G = \{g_{ij} : g_{ij} \in \mathbb{R}^1, i \in \{1, \dots, m\}\}_{j=1}^k$. По результатам работы группы экспертов оценки обрабатываются с целью получения общей оценки для всей группы $\mathbf{q} = \langle q_i : q_i \in \mathbb{R}^1 \rangle_{i=1}^m$. Эксперт может пропустить оценку некоторого объекта. При подсчете мнений экспертов пропущенные значения учитываются как значения “от оценок воздержусь”, обозначаемые $Null$. Считая, что лучший заповедник имеет больший балл, нормируем оценки каждого эксперта:

$$\bar{g}_{ij} = (g_{ij} - \min(g_{.j})) (\max(g_{.j}) - \min(g_{.j}))^{-1}, i \in \{1, \dots, m\}, j = 1, \dots, k.$$

Для каждого объекта подсчитываем среднее арифметическое

$$q_{0i} = \frac{1}{k_i} \sum_{j:g_{ij} \neq Null} g_{ij}, \quad (3.2)$$

где k_i — количество элементов $g_{i.}$, значение которых отлично от $Null$. Полученное упорядоченное множество значений $\mathbf{q}_0 = \langle q_{0i} \rangle_{i=1}^m, \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$ будем считать экспертной оценкой интегрального индикатора объектов. Экспертные оценки весов показателей \mathbf{w}_0 также находятся по формуле (3.2).

3.5 Предварительный анализ и кластеризация

Экспертами была высказана гипотеза о том, что многие свойства и показатели заповедников, в частности, показатели работы службы охраны и сама организация работы зависят от удаленности заповедника от населенных пунктов [38], [39]. Были сделаны пожелания определять интегральный индикатор для групп сравнимых между собой заповедников. В качестве критерия разбиения могут выступать такие показатели, как площадь, удаленность от населенных пунктов, антропогенная нагрузка [34].

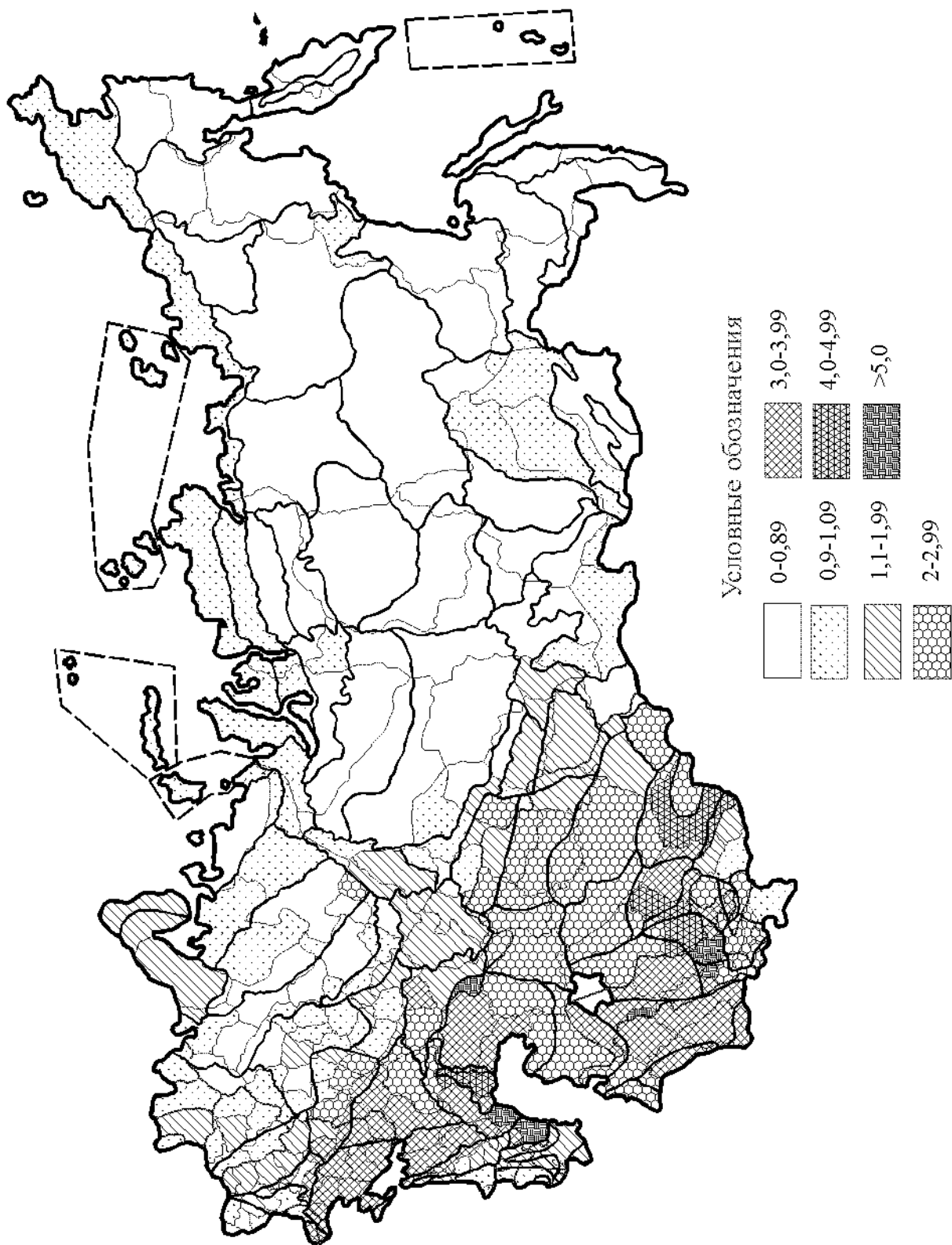


Рис. 3: Соотношение между антропогенной нагрузкой и резистивностью природных территорий. Составитель Н. А. Соболев [39].

На рис. 3 показано соотношение между антропогенной нагрузкой на природные территории и способностью территорий к самовосстановлению. Данная карта была составлена Н. А. Соболевым, см. [38], [39]. Покажем, как зависит площадь заповедника от антропогенной нагрузки на заповедник. Для расчетов была составлена таблица сопоставления площади заповедника и антропогенной нагрузки.

При подготовке данные были обработаны следующим образом. Пусть вектор $\mathbf{s} = \{s_i : s_i \in \mathbb{R}\}_{i=1}^m$ — площадь каждого из m заповедников, и $\mathbf{p} = \{p_i : p_i \in \{1, \dots, 6\}\}_{i=1}^m$ — величина антропогенной нагрузки. Пара (s_i, p_i) определяет состояние i -го заповедника. Покажем пары (\hat{s}_i, \hat{p}_i) на графике. По оси абсцисс отложена антропогенная нагрузка \hat{p} , а по оси ординат — логарифм площади заповедника \hat{s} .

Как видно из рис. 4, существует определенная линейная зависимость между антропогенной нагрузкой на заповедник \hat{s}_i и логарифмом площади заповедника \hat{p}_i . Коэффициент корреляции $r_{\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{p}}} = -0.69$. Уравнение прямой, подобранной методом наименьших квадратов для данного графика имеет вид $p = 12.37 - 1.13 \log_2 s$. Поэтому, предложение экспертов кластеризовать заповедники по значению антропогенной нагрузки для сравнения их внутри кластеров не противоречит предоставленным данным.

Таким образом заповедники были отобраны по критерию антропогенной нагрузки. Было введено шесть уровней антропогенной нагрузки на природные территории России [39]. Двадцать три заповедника, рассматриваемые далее, имеют самый высокий показатель воздействия человека на природу в непосредственной близости от территории заповедника. Заповедники признаны экспертами сравнимыми по данному критерию.

В качестве исходных данных для разведочного анализа рассмотрим матрицу A , включающую в себя двадцать три заповедника, указанных экспертами,

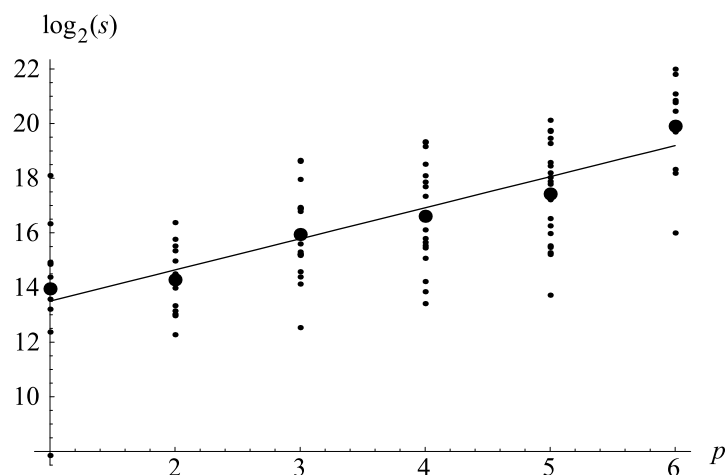


Рис. 4: Линейная зависимость между антропогенной нагрузкой и логарифмом площади заповедников

из таблицы 2. Матрица была пронормирована по формуле (1.4) в соответствии с вектором оптимальных значений показателей \mathbf{a}_j^{opt} , указанном экспертами, см. столбец “Оптимальное значение” таблицы 3.

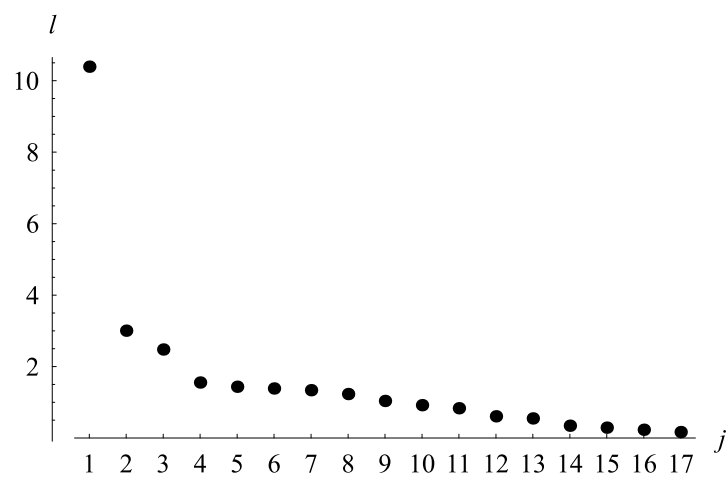


Рис. 5: Сингулярные числа матрицы исходных данных

Сингулярное разложение этой матрицы дает следующие сингулярные числа:
 $\Lambda = \text{diag}(10.4, 3.0, 2.5, 1.6, 1.4, 1.4, 1.3, 1.2, 1.0, 0.9, 0.8, 0.6, 0.5, 0.3, 0.3, 0.2, 0.2)$,
 округленные здесь до одного десятичного знака. Очевидно, что матрица не

очень сильно обусловлена, ее сингулярные числа показаны на рис. 5. По оси абсцисс отложены порядковые номера сингулярных чисел j , по оси ординат — значения соответствующих сингулярных чисел λ_j .

Число обусловленности [10] матрицы A равно $\kappa_A = 2700$.

3.6 Нахождение интегрального индикатора “без учителя”

При нахождении интегрального индикатора “без учителя” к матрице исходных данных применялись четыре процедуры нахождения интегральных индикаторов — вычисление нормы в метрике Минковского, метод главных компонент, метод сингулярного разложения, расслоение Парето.

Процедура вычисления нормы в метрике Минковского проводилась по формуле 1.7 для значений $k \in \{0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4, 16\}$. Каждому объекту v_i поставлена в соответствие строка \mathbf{a}_i нормированной матрицы \bar{A} исходных данных, умноженной слева на диагональную матрицу, построенную с помощью весов показателей, выставленных экспертами:

$$A = \bar{A} \text{diag}(\mathbf{w}_0).$$

На рис. 6 показана зависимость результатов вычисления нормы векторов $\|\mathbf{a}_i\|^k$ для различных значений k . Значение логарифма нормы вектора показано на оси ординат, номер вектора показан на оси абсцисс. Каждое множество точек, соединенное ломаной соответствует некоторому значению k . (Здесь ломаная линия показана для того, чтобы отличить один интегральный индикатор от другого). На данном графике значение k возрастает от ломаной к ломаной сверху вниз. Из графика видно, что порядок объектов при различных значениях k изменяется незначительно. В дальнейших вычислениях было выбрано значение $k = 1$, как удовлетворяющее гипотезе линейной зависимости интегрального индикатора q_i объекта с номером i от значений показателей \mathbf{a}_i этого объекта и не противоречащие результатам, полученным при больших значениях k . Интегральные

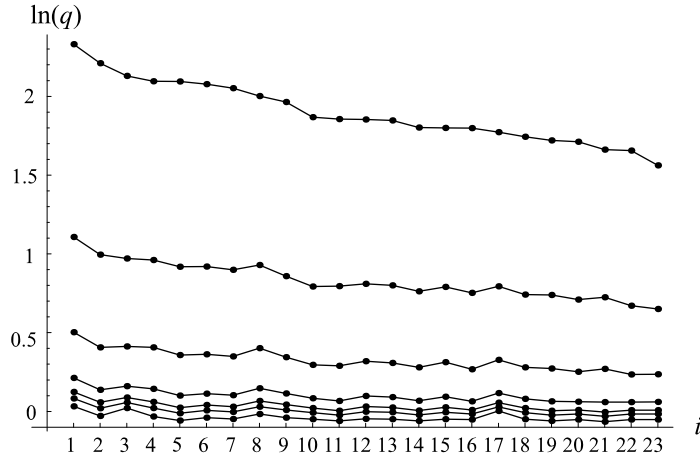


Рис. 6: Норма векторов-строк в различных метриках

индикаторы, полученные при $k = 0.5$ и $k = 0.25$, были отброшены как неустойчивые к изменениям отдельных элементов вектора \mathbf{a}_i : объект становился лучшим за счет возрастания значения одного элемента из \mathbf{a}_i при неудовлетворительных значениях остальных элементов.

На рис. 7 показаны результаты вычисления интегральных индикаторов \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 и \mathbf{q}_3 с помощью процедур вычисления взвешенного расстояния Минковского при $k = 1$, см. раздел 1.2.1, метода главных компонент, см. раздел 1.2.2, и сингулярного разложения, см. раздел 1.2.3; соответственно $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, $\mathbf{q}_2 = \bar{A}\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{q}_3 = U\lambda_1$. Здесь \bar{A} — центрированная матрица исходных данных, \mathbf{c}_1 — первая главная компонента матрицы A , λ_1 — первое сингулярное число разложения матрицы исходных данных $A = U\Lambda V^T$. В левой колонке показано сравнение наборов интегральных индикаторов $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, $(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, и $(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1)$. Для наглядности в каждом графике проведена прямая, аппроксимирующая множество пар значений интегрального индикатора для каждого объекта методом наименьших квадратов. Все интегральные индикаторы коррелируют друг с другом: $r_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} = 0.97$, $r_{\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} = 0.83$, $r_{\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1} = 0.87$.

В правой колонке показано сравнение вычисленных интегральных индикато-

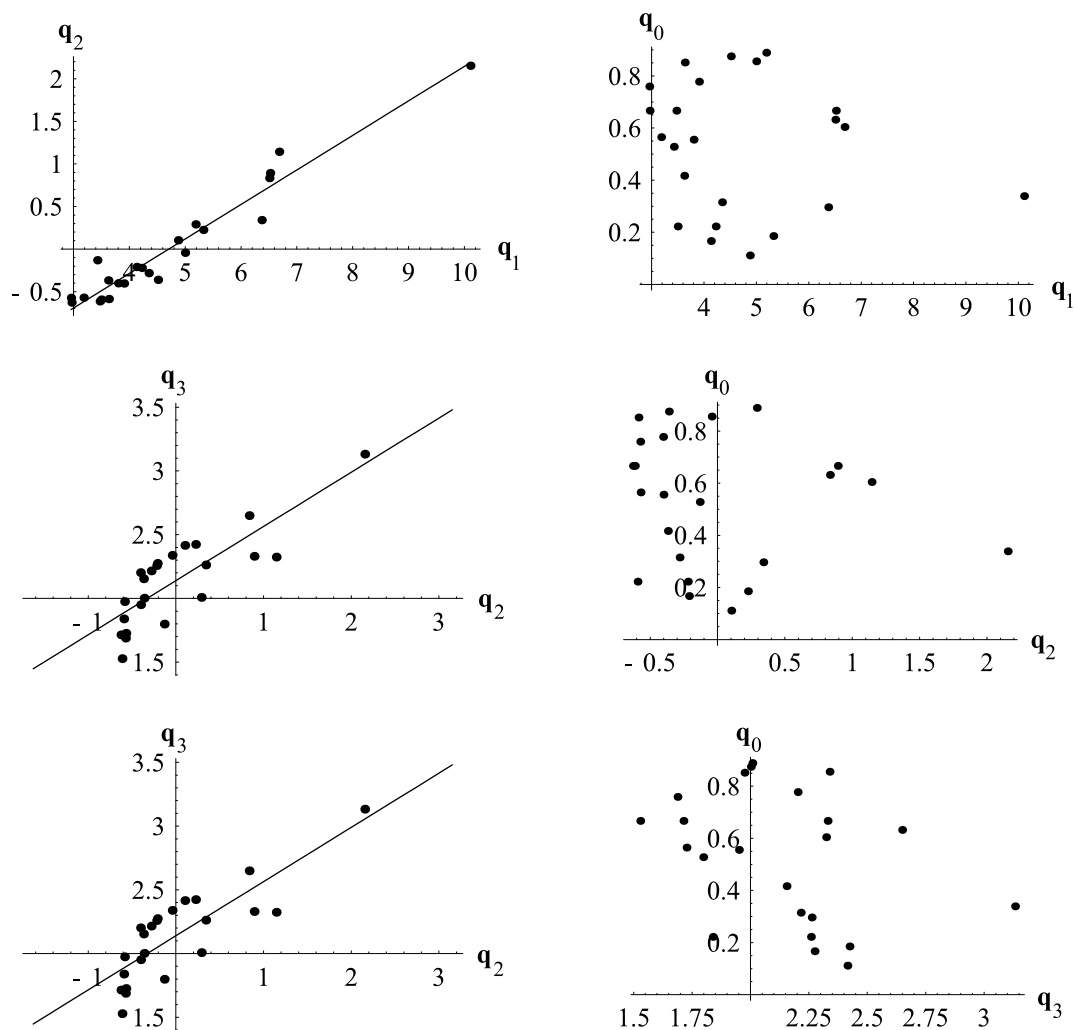


Рис. 7: Сопоставление интегральных индикаторов, полученных различными способами

ров q_1, q_2, q_3 с индикатором q_0 , полученным путем экспертной оценки. Вычисленные индикаторы слабо коррелируют с интегральным индикатором q_0 , предполагаемым экспертами: $r_{q_1, q_0} = -0.15$, $r_{q_2, q_0} = -1.14$, $r_{q_3, q_0} = -0.34$.

Применение Расслоения Парето к исходным данным дает неудовлетворительные результаты: все объекты поделены на три слоя. В слой “3” вошли 15, в слой “2” вошли семь объектов, в слой “1” вошли два объекта. Расслоение q_4 по редуцированной матрице исходных данных, в которую во-

шли три показателя, которые эксперты считают наиболее важными $\mathbf{q}_4 = \{8, 9, 7, 7, 4, 5, 8, 1, 8, 8, 9, 6, 7, 7, 2, 9, 8, 9, 6, 8, 8, 3, 5\}$ и расслоение \mathbf{q}_5 по редуцированной матрице исходных данных, в которую вошли три показателя, являющиеся наиболее информативными при вычислении интегрального индикатора “без учителя” $\mathbf{q}_5 = \{4, 3, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 3, 5, 3, 3, 2, 2, 3, 5, 3, 3, 3, 1, 3, 3, 4\}$ также дало неудовлетворительные результаты: коэффициент ранговой корреляции по Кендаллу между интегральными индикаторами \mathbf{q}_4 и \mathbf{q}_5 равен 0.04.

Таким образом, для того чтобы получить удовлетворительные для экспертов результаты, минимально противоречащие экспертным оценкам и исходным данным, требуется выполнить процедуру согласования экспертных оценок.

3.7 Согласование экспертных оценок

Для проведения процедур согласования, эксперты выставили собственные оценки интегральных индикаторов \mathbf{q}_0 для 23-х объектов и оценки весов показателей \mathbf{w}_0 для 17-ти показателей. Каждой экспертной оценке интегральных инди-

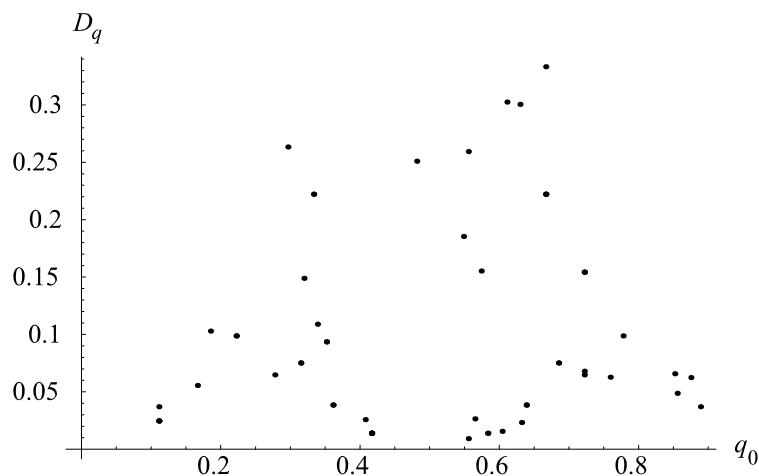


Рис. 8: Дисперсия мнений экспертов при оценке интегральных индикаторов q_{0i} , полученных способом, который описан в разделе 3.4, поставлена в соответствие дисперсия экспертных мнений $D_{q_{0i}}$.

Как видно из рис. 8, дисперсия экспертных мнений относительно того, какой заповедник считать лучшим, невелика. По оси абсцисс отложены значения q_{0i} экспертных оценок из \mathbf{q}_0 , а по оси ординат – дисперсия экспертных мнений $D_{q_{0i}}$. Коэффициент корреляции экспертных оценок интегрального индикатора и дисперсии мнений различных экспертов $r_{\mathbf{q}_0, D_{\mathbf{q}_0}} = 0.14$. Из графика видно, что дисперсия экспертных мнений при выставлении оценок наилучшим и наихудшим заповедникам мала, а при выставлении оценок заповедниками, не входящим в эти две группы, мнения экспертов разделяются.

Также каждой экспертной оценке весов w_{0j} поставлена в соответствие дисперсия экспертных мнений. На рис. 9 показана дисперсия экспертных мнений $D_{w_{0j}}$ при оценке весов показателей. По оси абсцисс отложены значения w_{0j} экспертных оценок \mathbf{w}_0 , а по оси ординат – дисперсия мнений $D_{w_{0j}}$. Коэффициент корреляции

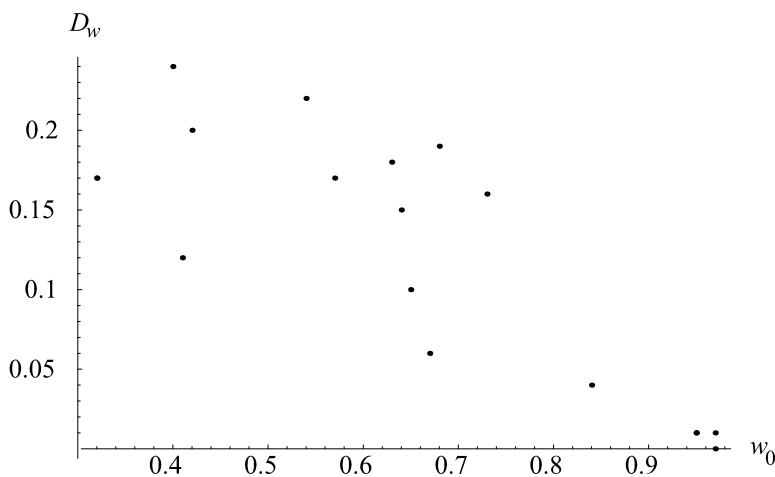


Рис. 9: Дисперсия мнений экспертов при оценке весов показателей

экспертных оценок \mathbf{w}_0 и дисперсии мнений экспертов $D_{\mathbf{w}_0}$ равен $r_{\mathbf{w}_0, D_{\mathbf{w}_0}} = -0.82$. Очевидно, что эксперты согласны между собой в оценке наиболее важных показателей, а при оценке второстепенных показателей их мнения разделяются.

Работа по согласованию экспертных оценок проводилась следующим образом. Эксперты выставили оценки интегральных индикаторов и весов показате-

лей. Экспертные оценки были усреднены, рассмотрена дисперсия оценок. Затем эксперты определили оптимальное значение каждого показателя, см. таблицу 5, и матрица исходных данных была нормирована по столбцам по формуле (1.4) для сопоставимости шкал, в которых проводились измерения. В качестве предварительной оценки “без учителя” была вычислена первая главная компонента матрицы данных и найдены проекции векторов каждого заповедника на ось первой главной компоненты. Полученные результаты эксперты сочли неудовлетворительными.

Тогда были использованы два метода согласования, давшие примерно одинаковые оценки интегральных индикаторов, см. столбцы \mathbf{q}_α и \mathbf{q}_γ таблицы 7, которые эксперты сочли удовлетворительными. Параметры доверия α и γ^2 решено было назначить, исходя из условия (2.12). В данном случае $\alpha = 0.32575$, $\gamma^2 = 0.93376$.

Выбор параметра доверия к экспертным оценкам интегрального индикатора или к экспертным оценкам весов показателей можно проиллюстрировать следующим образом. На рис. 10 показано изменение векторов \mathbf{w}_α и \mathbf{q}_α для различных значений параметра α . По оси абсцисс отложены номера компонент векторов, а по оси ординат отложены значения векторов. Значения параметра α на графиках сверху вниз соответственно равны $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$. Каждая горизонтальная пара графиков показывает состояние согласованной пары векторов \mathbf{q}_α и \mathbf{w}_α при данном значении α . По оси абсцисс отложены номера компонент векторов, по оси ординат отложены значения данных компонент векторов.

При минимальном значении параметра α , близки исходная оценка индикатора \mathbf{q}_0 и согласованная оценка \mathbf{q}_α , см. верхний правый график. При максимальном значении параметра α , близки исходная оценка весов показателей \mathbf{w}_0 и согласованная оценка \mathbf{w}_α , см. нижний левый график. При некотором значении α расстояния обоих согласованных векторов до соответствующих им исход-

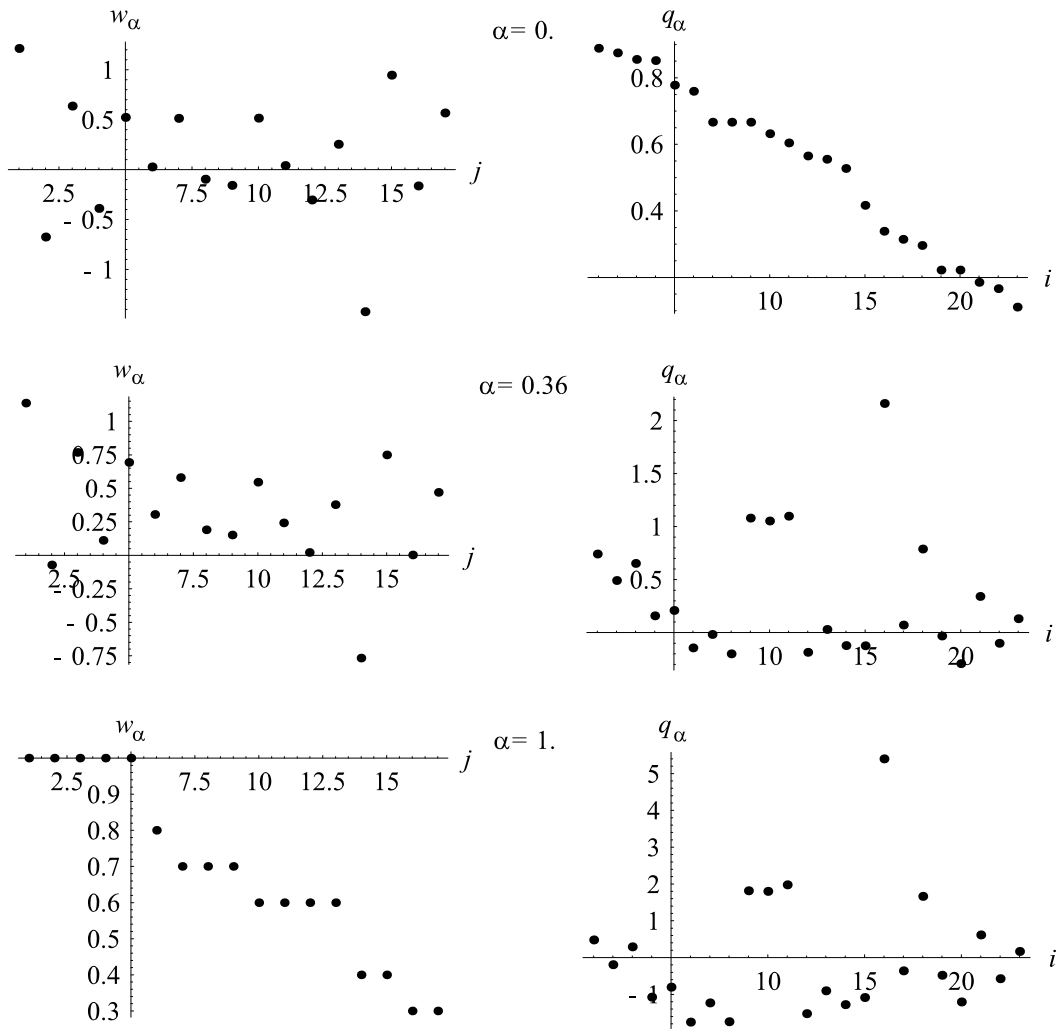


Рис. 10: Изменение весов показателей и интегрального индикатора при различных значениях параметра α

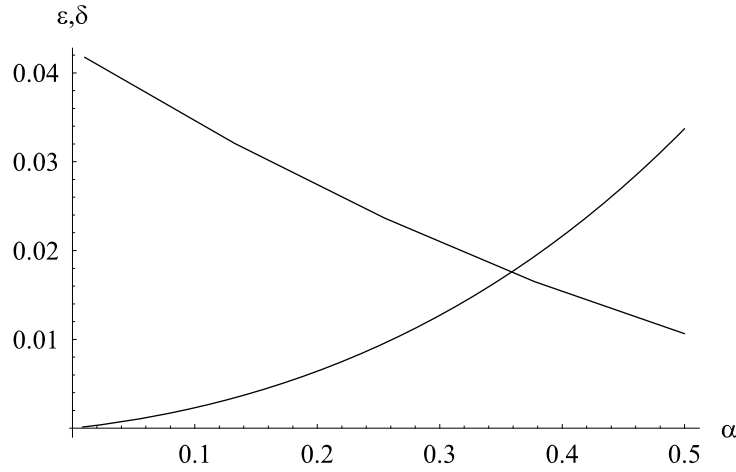


Рис. 11: Зависимость расстояний ε и δ от параметра α

ных векторов становятся одинаковы: $\frac{\varepsilon^2}{m} = \frac{\delta^2}{n}$. Изменение расстояний ε, δ при выборе параметра $\alpha \in [0, 1]$ можно увидеть на рис. 11. Здесь по оси абсцисс отложено значение α , а по оси ординат значения ε, δ . При увеличении α расстояние ε между векторами \mathbf{q}_0 и \mathbf{q}_α увеличивается, а расстояние δ между векторами \mathbf{w}_0 и \mathbf{w}_α уменьшается.

На рис. 13 показано изменение весов показателей и интегрального индикатора при различных значениях параметра γ^2 . Для четырех пар графиков сверху вниз значения γ^2 соответственно равны $\{0.001, 1, 100, 10000\}$. Так же, как и на рис. 10, по оси абсцисс отложены номера компонент векторов \mathbf{w}_γ на левом графике и \mathbf{q}_γ на правом графике, а по оси ординат значения соответствующих компонент.

Изменение расстояний ε, δ при выборе параметра $\gamma^2 \in [0, \infty)$ можно увидеть на рис. 12. Этот график подобен графику, показанному на рис. 11, только зависимость расстояний ε и δ от параметра показана для процедуры γ^2 -согласования.

Сравнение результатов работы двух алгоритмов — процедуры α -согласования и процедуры γ^2 -согласования показано на рис. 14. По оси абсцисс отложены значения компонент вектора \mathbf{q}_α , а по оси ординат отложены значения вектора \mathbf{q}_γ — для левого графика, и соответственно, значения векторов $\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}_\gamma$ для

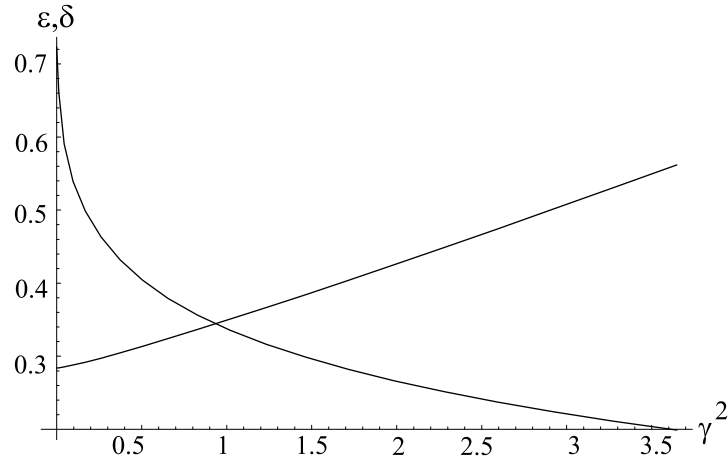


Рис. 12: Зависимость расстояний ϵ и δ от параметра γ^2

правого графика. Из графика видно, что согласованные оценки коррелируют. Коэффициент корреляции по Пирсону для векторов интегральных индикаторов $r_{\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\gamma} = 0.76$, а для векторов весов показателей $r_{\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{w}_\gamma} = 0.78$.

Применим к рассматриваемым экспертным оценкам процедуру τ -согласования. Данная процедура не дает, в общем случае, согласованных оценок. Процедура отображает векторы экспертных оценок $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ соответственно в такие векторы \mathbf{q}_τ и \mathbf{w}_τ , которые минимизируют невязку $\|\Delta\|^2$ уравнения $A(T_w(\mathbf{w}_0)) = T_q(\mathbf{q}_0) + \Delta$. Для нахождения таких векторов была написана функция `TauRecode[a, b, eps]`, которая принимает вектор исходных экспертных оценок $\mathbf{b} \in \{\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0\}$, вектор вычисленных экспертных оценок $\mathbf{a} \in \{A^+\mathbf{q}_0, A\mathbf{w}_0\}$, полученных умножением экспертных оценок справа на матрицу A , и параметр `eps`, управляющий приближением вектора \mathbf{a} вектором \mathbf{b} . Функция перекодировки монотонная и не меняет порядок элементов приближаемого вектора. Функция возвращает скорректированный вектор из множества $\{\mathbf{q}_\tau, \mathbf{w}_\tau\}$. Пример работы функции с исследуемыми данными показан на рис. 15. По оси абсцисс отложены значения элементов вектора $A^+\mathbf{q}_0$, по оси ординат отложены значения элементов вектора \mathbf{w}_0 . На графике показаны два множества точек. Первое

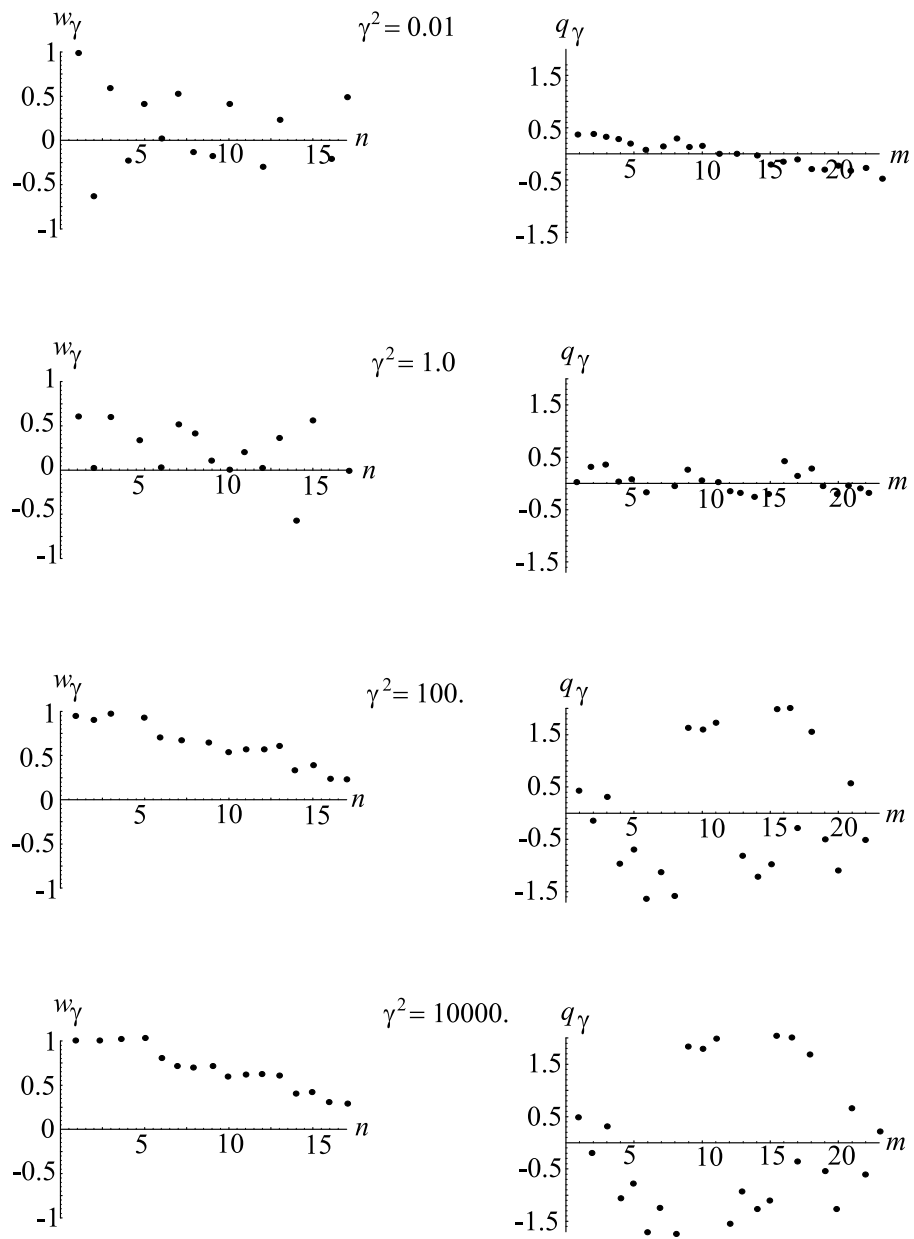


Рис. 13: Изменение весов показателей и интегрального индикатора при различных значениях параметра γ^2

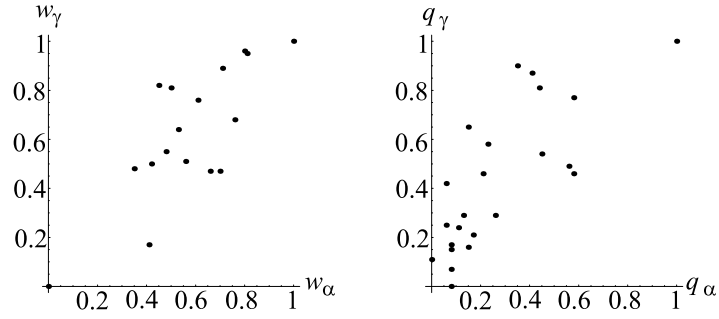


Рис. 14: Сравнение результатов работ процедур α -согласования и γ^2 -согласования

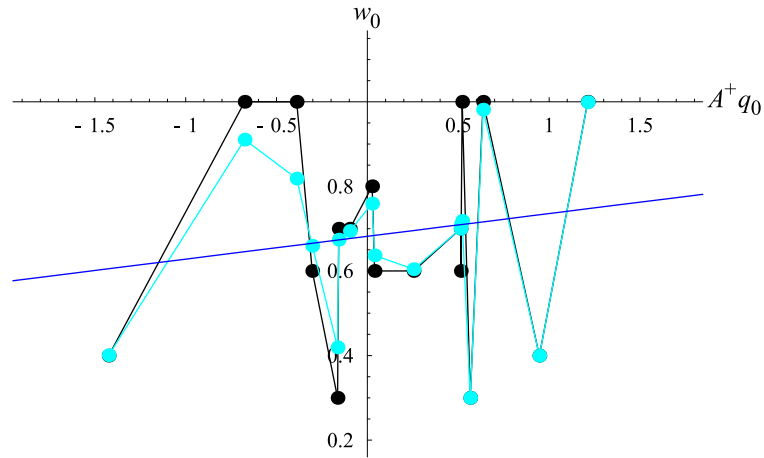


Рис. 15: Приближение экспертных оценок \mathbf{w}_0 вычисленными оценками $A^+ \mathbf{q}_0$ при значении параметра $\epsilon^2=1$.

множество, соединенное для наглядности темной линией, есть множество пар $f = \{(w_{1j}, w_{0j})\}$, $j = 1, \dots, n$, где вектор $A^+ \mathbf{q}_0 = \mathbf{w}_1 = \langle w_{11}, \dots, w_{1n} \rangle$ — вектор вычисленных экспертных оценок, и вектор $\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, \dots, w_{0n} \rangle$ — вектор исходных экспертных оценок. Прямая линия на графике аппроксимирует функцию f . Второе множество точек, соединенное для наглядности светлой линией есть множество пар $\phi = \{(w_{1j}, w_{\tau j})\}$, $j = 1, \dots, n$, где вектор $A^+ \mathbf{q}_0 = \mathbf{w}_1 = \langle w_{11}, \dots, w_{1n} \rangle$ — вектор вычисленных экспертных оценок, и вектор $\mathbf{w}_\tau = \langle w_{\tau 1}, \dots, w_{\tau n} \rangle$ — скорректированный вектор, полученный отображением $T_w : \mathbf{w}_0 \longrightarrow \mathbf{w}_\tau$.

Результаты работы процедуры τ -согласования использовались в качестве входной тройки для процедуры γ^2 -согласования с целью получения согласованных экспертных оценок. Для оценки работ различных процедур согласования воспользуемся полученным расстоянием от векторов экспертных оценок до согласованных векторов. Результаты сравнения работ алгоритмов показаны в таблице 6. Как видно из вышеприведенной таблицы, расстояние $\frac{\varepsilon^2}{m} + \frac{\delta^2}{n}$, полученное

Процедура	$\frac{\varepsilon^2}{m} + \frac{\delta^2}{n}$
α -согласование	0.67
γ^2 -согласование	0.62
τ - γ^2 -согласование	0.59

Таблица 6: Расстояния от согласованных векторов до начальных

с помощью процедуры γ^2 -согласования меньше, чем расстояние, полученное с помощью процедуры α -согласования, так как во втором случае согласованные векторы $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ принадлежат соответственно отрезкам $[\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$ и $[\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1]$, а в первом случае согласованные векторы $\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma$ лежат в окрестности соответственно векторов \mathbf{q}_0 и \mathbf{w}_0 . Композиция процедур τ -согласования и γ^2 -согласования дает еще меньшее суммарное расстояние $\frac{\varepsilon^2}{m} + \frac{\delta^2}{n}$.

На рисунке 16 приведен модельный пример сравнения результатов проце-

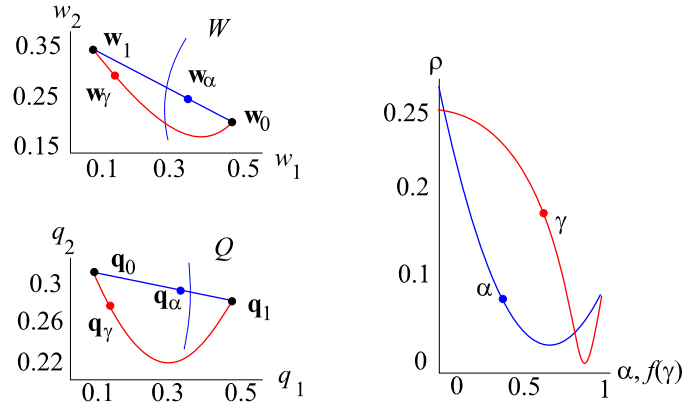


Рис. 16: Сравнение результатов, полученных при помощи процедур α - и γ^2 -согласования.

дур α - и γ^2 -согласования. Левый верхний и левый нижний графики показывают множество значений, которые принимают согласованные векторы $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ и $\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma$ при различных значениях параметров согласования α и γ^2 . На осях абсцисс и ординат отложены значения компонент векторов. Из графиков видно, что векторы $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ принимают значения на отрезках соответственно $[\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$ и $[\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1]$. Векторы $\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma$ принимают значения в окрестности векторов соответственно \mathbf{q}_0 и \mathbf{w}_0 , как обозначено дугами. На правом графике показано как зависит суммарное взвешенное расстояние от начальных экспертных оценок до согласованных при различных значениях параметров согласования. Процедура γ^2 -согласования принимает меньшие значения, чем процедура α -согласования.

Таким образом, процедура α -согласования рекомендуется в том случае, когда эксперты выбирают параметр согласования самостоятельно, а процедура γ^2 -согласования рекомендуется в том случае, когда требуется найти согласованные оценки при минимальном суммарном взвешенном расстоянии от начальных экспертных оценок до согласованных.

Результаты ранжирования заповедников показаны в таблице 7. По просьбе экспертов названия заповедников изменены. К результатам процедур согласо-

вания было применено расслоение Парето, и все заповедники были разбиты на классы (ранги). Заповедники сортированы по убыванию номера класса, лучшими заповедниками являются те, у которых номер класса меньше.

Ранг	Название заповедника	q_α	q_γ
1	Заповедник А	1.00	1.00
2	Заповедник В	0.35	0.90
2	Заповедник С	0.41	0.87
2	Заповедник D	0.58	0.77
2	Заповедник E	0.44	0.81
3	Заповедник F	0.45	0.54
3	Заповедник G	0.23	0.58
3	Заповедник H	0.56	0.49
3	Заповедник I	0.58	0.46
3	Заповедник J	0.15	0.65
4	Заповедник K	0.21	0.46
4	Заповедник L	0.26	0.29
5	Заповедник M	0.13	0.29
5	Заповедник N	0.06	0.42
5	Заповедник O	0.17	0.21
6	Заповедник P	0.06	0.25
6	Заповедник Q	0.15	0.16
6	Заповедник R	0.11	0.24
7	Заповедник S	0.08	0.17
8	Заповедник T	0.08	0.15
9	Заповедник U	0.08	0.07
9	Заповедник V	0.00	0.11
10	Заповедник W	0.08	0.00

Таблица 7: Ранжирование заповедников по значению интегрального индикатора

4 Обсуждение

Интегральный индикатор произвольных объектов может быть получен описанными выше процедурами трех типов: получение интегрального индикатора “без учителя”, получение интегрального индикатора с помощью весов показателей, назначенных экспертами, и с помощью процедуры согласования экспертных оценок. Первый тип процедур служит для получения интегрального индикатора по имеющейся, ранее построенной модели, без участия экспертов. Моделью в данном случае является способ получения интегрального индикатора, например, (1.7), (1.11), (1.19), (1.21). Возможны два подхода в построении таких интегральных индикаторов:

1. Интегральный индикатор принимает большее значение у того объекта, который имеет один отличный показатель при прочих удовлетворительных.
2. Интегральный индикатор принимает большее значение у того объекта, который имеет много достаточно хороших показателей.

Так, при существующем порядке подсчета среднего балла некоторые организации имеют неплохой средний балл при наличии плохих оценок по некоторым показателям, компенсируя это отличными оценками по другим показателям. Или, напротив, в передовики выходят организации, имеющие среднюю, но стабильную отчетность. Выбор одного из подходов остается за экспертом и может диктоваться неформальными причинами, математической моделью или моделью порождения исходных данных. Для первого подхода использовался метод вычисления Манхэттенского расстояния (1.7) и расслоение Парето (1.21), для второго подхода применялись методы главных компонент (1.11) и сингулярное разложение (1.19).

Полученные результаты могут оказаться неадекватными с точки зрения экспертов. Причина этого может быть как в математической модели, которая была

выбрана, так и в методе. В данной работе рассматривается только линейная связь исходных данных, весов показателей, и получаемых интегральных индикаторов. Очевидно, что любой показатель, от которого интегральный индикатор зависит нелинейно, можно преобразовать так, чтобы он удовлетворял линейной модели.

Второй тип процедур — получение интегрального индикатора не только с помощью данных об объектах и модели, но и с помощью одной из экспертных оценок — оценок интегрального индикатора объектов \mathbf{q}_0 или оценок весов показателей \mathbf{w}_0 , см. например, (1.9). Более подробное описание есть в работах [50], [51]. Если интегральный индикатор определяется моделью, и с выбором процедуры его получения не возникает проблем, то со взвешиванием показателей часто такие проблемы появляются: возникают разногласия при назначении точных весов, после взвешивания получаются неадекватные результаты. Очевидно, что в смысле получения ожидаемых экспертами результатов свертки, экспертные оценки не точны.

Возникающие разногласия в вычисляемых интегральных индикаторах и в интегральных индикаторах, назначаемых экспертом, разрешает третий тип процедур. Он заключается в согласовании, или изменении экспертных оценок таким образом, чтобы решение прямой и обратной задачи, то есть, получение интегрального индикатора по данным весам показателей в рамках назначенной модели и получение весов показателей по данным интегральным индикаторам, давало адекватные, с точки зрения экспертов, результаты. Процедуры согласования используют как оценки, выставленные в линейных шкалах, см. (2.9), (2.16), так и оценки, выставленные в порядковых шкалах, см. (2.18).

При обсуждении данной работы было высказано две точки зрения на экспертные оценки. Первое мнение — экспертные оценки выставляются в линейных шкалах экспертом или группой экспертов с точностью, достаточной для постро-

ения адекватных математических моделей. Второе мнение — экспертные оценки не обладают достаточной точностью. Такие оценки можно использовать только для сравнения объектов в порядковых шкалах.

Алгоритмы вычисления интегральных индикаторов по измеряемым данным предполагают, что веса показателей выставлены достаточно точно, чтобы получить адекватные, с точки зрения экспертов, результаты. При решении практических задач возникает проблема назначения этих весов. В данной работе был предложен подход, при котором веса показателей и оценки объектов, выставленные экспертами согласуются с помощью специальных процедур. В результате, во-первых, получены обоснованные и адекватные с точки зрения экспертов, интегральные индикаторы объектов. Во-вторых, получены веса показателей, делающие алгоритм вычисления интегрального индикатора устойчивым к изменению измеряемых данных и пригодным к дальнейшему использованию уже без участия экспертов.

Результат работы этих процедур использовался в модели, описанной во введении (3.1) при анализе эффективности управления заповедниками. Кроме этого, предложенные процедуры согласования могут применяться для сравнительной оценки объектов в различных областях, связанных с получением интегральных индикаторов и согласованных экспертных оценок.

5 Заключение

В данной работе получены следующие основные результаты:

1. Рассмотрены процедуры получения интегрального индикатора множества объектов “без учителя”. Предложена процедура построения интегрального индикатора с помощью первого сингулярного вектора матрицы исходных данных. Предложена процедура выбора базовых показателей при расслоении Парето на основе метода главных компонент.
2. Развита процедура, разделяющая множество объектов на кластеры. Исходными данными является матрица, соответствующая данному множеству объектов. Дополнительными параметрами являются размерность пространства, в котором должны находиться кластеры и распределение наложенного шума. Результатом работы процедуры является древовидный граф, в узлах которого находятся кластеры.
3. Введен оператор согласования экспертных оценок. Предложены процедуры согласования экспертных оценок для линейных и ранговых шкал.
4. Предложена процедура регуляризации оператора, отображающего пространство весов показателей в пространство интегральных индикаторов, и доказана его устойчивость.
5. Создано программное обеспечение для построения интегральных индикаторов и согласования экспертных оценок.
6. Методы проиллюстрированы задачей по оценке эффективности работы заповедников России. Использовались данные ежегодных отчетов о работе службы охраны заповедников и экспертные оценки интегральных индикаторов и весов показателей работы заповедников. Описана модель управле-

ния заповедниками с обратной связью, в рамках которой поставлена задача оценки состояния заповедника.

7. Получены согласованные оценки эффективности работы заповедников России, учитывающие как измеряемые данные о работе заповедников, так и экспертные оценки. Получены веса показателей, применяемые для последующих вычислений интегральных индикаторов без дополнительного опроса экспертов.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Стрижов В. В. Согласование экспертных оценок для биосистем в экстремальных условиях. Сообщения по прикладной математике. Научное издание. — М.: ВЦ РАН 2002. — 41 с.
2. Стрижов В. В., Шакин В. В. Согласование экспертных оценок в ранговых шкалах. /Математика. Компьютер. Образование. IX международная конференция. Тезисы докладов. — М.: “Прогресс-Традиция”, 2002. — С. 148.
3. Стрижов В. В., Шакин В. В. Согласование экспертных оценок. /Математические методы распознавания образов (ММО-10), Доклады X всероссийской конференции. Научное издание. — РАН, ВЦ, РФФИ, Москва, 2001. — с. 137-138.
4. Стрижов В. В., Шакин В. В., Благовидов В. В. Согласование экспертных оценок при анализе эффективности управления заповедниками. /Тезисы докладов “Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества.” — Москва, 2001. — С. 30.
5. Molak V, Shakin V, Strijov V., Kyoto Index for the Power Plants in the USA. The 3-rd Moscow International Conference On Operations

- Research (ORM2001). Abstracts. — Вычислительный центр РАН, Москва, 2001 — P. 80.
6. Strijov V., Shakin V., An algorithm for clustering of the phase trajectory of a dynamic system. — Mathematical Communications — Supplement 1(2001) — p. 159-165.
 7. Зубаревич Н. В., Тикунов В. С., Крепец В. В., Стрижов В. В., Шакин В. В. Многовариантные методы интегральной оценки развития человеческого потенциала в регионах Российской Федерации. /в сб. ГИС для устойчивого развития территорий. Материалы Международной конференции. — Петропавловск-Камчатский, 2001. — с. 84-105.
 8. Стрижов В. В., Шакин В. В. Программное обеспечение для исследования фазовых траекторий. /Математические методы распознавания образов (ММРО-9), Доклады IX всероссийской конференции. Научное издание. — РАН, ВЦ, РФФИ, Москва, 1999. — с. 227-230.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность Всеволоду Владимировичу Шакину и Алексею Константиновичу Благовидову за постоянное внимание к работе и предложенные идеи. Автор выражает признательность Александру Михайловичу Шурыгину за ряд ценных замечаний, Всеволоду Борисовичу Степаницкому и сотрудникам отдела особо охраняемых природных территорий Департамента ООС и ЭБ МПР России за предложенную тему исследования и предоставленные данные, а также экспертам за проделанную работу по выставлению экспертных оценок.

Список литературы

- [1] Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика /Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989. — С. 334.
- [2] Айвазян С. А. Интегральные индикаторы качества жизни населения: их построение и использование в социально-экономическом управлении и межрегиональных сопоставлениях. — М.: ЦЭМИ РАН, 2000. — С. 56.
- [3] Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998. — С. 111.
- [4] Айвазян С. А. Сравнительный анализ интегральных характеристик качества жизни населения субъектов Российской Федерации. /Препринт #WP/2001/125. — М.:ЦЭМИ РАН, 2001. — С. 8-13.
- [5] Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Выбор вариантов: основы теории. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — С. 52-58.
- [6] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972. — С. 13-45.
- [7] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: Учеб. пособие. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — С. 44-56.
- [8] Белкин А. Р., Левин М. Ш. Принятие решений: комбинаторные методы аппроксимации информации. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — (Теория и методы системного анализа). — С. 40-42.
- [9] Гилязов С. Ф. Методы решения линейных некорректных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1987, — С. 54-60.

- [10] Голуб Дж., Ван-Лоун Ч. Матричные вычисления — М.: Мир, 1999. — С. 223.
- [11] Государственный комитет Российской Федерации по охране окружающей среды. Государственный доклад "О состоянии окружающей природной среды Российской Федерации в 1998 году". — М.: Государственный центр экологических программ, 2000. — 2-е изд. — 498 с.
- [12] Де Бор К. Практическое руководство по слайдам: пер. с англ. — М: Радио и связь, 1985. — С. 41-68.
- [13] Дёжкин В. В., Пузаченко Ю. Г. Концепция системы особо охраняемых природных территорий России. Авторская версия. — М.: Изд. Рос. Представительства ВВФ, 1999. — С. 6.
- [14] Жуковин В. Е., Макеев С. П., Шахнов И. Ф. Потенциальные нечеткие отношения и их использование в задачах упорядочивания объектов. /Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988, №5. — С. 182-189.
- [15] Закон РФ об особо охраняемых природных территориях.
- [16] Загоруйко Н. Г. Прикладные методы анализа данных и знаний — Новосибирск: Издательство института математики, 1999. — С. 36-61.
- [17] Иванов В. К. О линейных некорректных задачах. — ДАН СССР, 1962, 145, №2.
- [18] Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое программное обеспечение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1998. — С. 233-234.
- [19] Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры: Пер. с англ. — М.: Мир, 2000. — 687 с.

- [20] Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. Изд. 2-е, пересмотр. и дополнен. — М.: Фазис: ВЦ РАН, 2000. — С. 203.
- [21] Крохмаль А. Г. Карачаево-Черкессия: эколого-географические проблемы. Ростов-на-Дону. Изд-во Ростовского госуниверситета, 1999 — 200 с.
- [22] Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика: пер. с англ. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 384 с.
- [23] Кулагина Г. Д. Статистика окружающей среды: учебное пособие. — М.: Изд-во МНЭПУ, 1999. — 104 с.
- [24] Литвак Б. Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа. — М.: Радио и связь, 1982. — С. 69-88.
- [25] Лурье П. М., Крохмаль А. Г., Панов В. Д., Панова С. В., Тамов М. Ч. Карачаево-Черкессия: климатические условия. Отв. Редактор доктор геол.-минер. наук, проф. Ю. П. Хрусталева. Ростов н/Д: Изд-во Рост. Ун-та, 2000. — 196 с.
- [26] Малоземов В. Н., Певный А. Б. Полиномиальные сплайны: Учеб. пособие. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. — С. 9-17.
- [27] Макаров В. Л., Айвазян С. А., Борисова С. В., Лакалин Э. А. Эконометрическая модель экономики России для целей краткосрочного прогноза и сценарного анализа. /Препринт #WP/2001/121. — М.: ЦЭМИ РАН, 2001. — 34 с.
- [28] Макеев С. П., Остапенко С. Н., Серов Г. П., Шахнов И. Ф. Аппроксимация нечетких отношений второго типа нечеткими обратимыми кавзисериями. — М.: ВЦ АН СССР, 1988. — 34 с.

- [29] Маркус. М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука. 1972, — С. 128-129.
- [30] Материалы I-го рабочего совещания WWF-IUCN по экспресс-оценке эффективности управления ООПТ Кавказского региона. Сочи, 2001 г.
- [31] Морозов В. А. Методы регуляризации неустойчивых задач. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — С. 20-33.
- [32] Орлов А. И. Современный этап развития теории экспертных оценок. /Заводская лаборатория, 1996, №1.
- [33] Пинскер И. Ш. Представление функций многих переменных при помощи суммирующих, множительных и простейших функциональных устройств. — Труды ИМАШ. Семинар по точности в машиностроении и приборостроении, вып. 8. М., 1965.
- [34] Родоман Б. Б. Территориальные ареалы и сети. Очерки теоретической географии. — Смоленск: Ойкумена, 1999 — С. 66-82.
- [35] Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г., — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — С. 59-75.
- [36] Северо-Осетинский государственный заповедник. — Орджоникидзе: Ир, 1989. — 106 с.
- [37] Скотт П. Психология оценки и принятия решений /Перевод с англ. — М.: Информационно-издательский дом “Филинъ”, 1998. — С. 266.
- [38] Соболев Н. А., Руссо Б. Ю. Стартовые позиции экологической сети Северной Евразии: рабочая гипотеза. — Охрана живой природы, 1998, вып.1(9). Нижний Новгород. — С. 22-31.

- [39] Соболев Н. А. Предложения к концепции охраны и использования природных территорий. “Охрана дикой природы”. 1999, № 3 (14), — С. 20-24.
- [40] Статические и динамические экспертные системы: Учеб. пособие /Э. В. Попов, И. Б. Фоминых, Е. Б. Кисель, М. Д. Шапот. — М. Финансы и статистика, 1996. — 320 с.
- [41] Степанов В. С. О вероятности ошибки линейного фишеровского классификатора с использованием отбора главных компонент. /Заводская лаборатория, 1991, №5, с. 57-61.
- [42] Стратегия экологического образования и воспитания в XXI веке: Тезисы докладов VI международной конференции по экологическому образованию /Под общей ред. акад. Н. Н. Моисеева. — М.: Изд-во МНЭПУ, 2000. — С. 246.
- [43] Стрижов В. В., Шакин В. В., Благовидов В. В. Согласование экспертных оценок /Тезисы докладов “Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества”. Москва, 2001. — С. 30.
- [44] Стрижов В. В., Шакин В. В. Программное обеспечение для исследования фазовых траекторий. Математические методы распознавания образов (ММРО-9), Доклады IX всероссийской конференции. Научное издание — РАН, ВЦ, РФФИ, Москва, 1999. — С. 227-230.
- [45] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — С. 110.
- [46] Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970. — С. 20-22.
- [47] Шакин В. В. Вычислительная электрокардиография. — М.: Наука, 1981. — С. 67.

- [48] Шакин В. В. Вычислительные процедуры для опознавания векторных функций /В сб. Опознавание и описание линий — М.: Наука, 1972, С. 58-77.
- [49] Шакин В. В. Биосистемы в экстремальных условиях. /Журнал общей биологии 1991, 6, Том 52. — С. 784-791.
- [50] Шакин В. В. К объективизации работы жюри. Линейная модель связи ценности объектов и индексов. /в кн. под ред. Кулагина А. С. Методика и техника статистической обработки материалов социологических исследований идеологической работы. — М.: Академия общественных наук при ЦК КПСС, 1972. — С. 251-263.
- [51] Шакин В. В. Об измерении связи между качественными признаками. /в кн. под ред. Кулагина А. С. Методика и техника статистической обработки материалов социологических исследований идеологической работы. — М.: Академия общественных наук при ЦК КПСС, 1972. — С. 264-272
- [52] Шакин В. В. Парето-классификация конечных выборок. Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества продукции. V-я научная конференция стран СНГ. Тезисы докладов. — М.: Центральный экономико-математический институт РАН, 1993. — С. 96-97.
- [53] Шакин В. В. Простые алгоритмы классификации линий. /в кн. Опознавание и описание линий. — М.: Наука, 1972 — С. 40-46.
- [54] Шакин В. В. Цели экологического образования: Целесообразное устойчивое развитие и повышение качества жизни. /в сб. Стратегия экологического образования и воспитания в XXI веке: Тезисы докладов VI Международной конференции по экологическому образованию. /Под общей ред. акад. Н. Н. Моисеева. — М.: Изд-во МНЭПУ, 2000. — С. 246.

- [55] Шурыгин А. М. Прикладная стохастика: робастность, оценивание, прогноз. — М.: Финансы и статистика, 2000. — С. 99.
- [56] Экология, охрана природы и экологическая безопасность. Учебное пособие для системы повышения квалификации и переподготовки государственных служащих. Под общей редакцией проф. В. И. Данилова-Данильяна. — М.: Изд-во МНЭПУ, 1997. — С. 511.
- [57] Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М.: Мир, 1969. — С. 15-18.
- [58] Функциональное шкалирование. /П. О. Авен, И. Б. Мучник, А. А. Ослон. — М.: Наука, 1988. — 181 с.
- [59] IUCN-CIDA-WWF. Экспертно-статистический метод оценки эффективности работы ООПТ. Сборник анкет. Рукопись. — М.:IUCN, 2001 — 18 с.
- [60] IUCN-CIDA-WWF. Ежегодные отчеты о работе государственных заповедников России. 1995-2000 гг. Рукопись. — М.: IUCN, 2001 — 118 с.
- [61] Hansen, Per Christian. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems, SIAM, Philadelphia, 1998. — p. 29-31.
- [62] Hocking, M., Stolton, S. and Dudley, N. Evaluating Effectiveness: A Framework for Assessing the Management of Protected Areas. Gland, Switzerland and Cambridge, UK.: IUCN, 2000. x+121pp.
- [63] Strijov V., Shakin V., An algorithm for clustering of the phase trajectory of a dynamic system. — Mathematical Communications — Supplement 1(2001) — pp. 159-165.

[64] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. Numerical Recipes in C: The Art of scientific Computing — NY: Cambridge University Press, 1992. — P. 456.

Список условных обозначений

В данной работе были введены следующие основные обозначения. Имеются множество $\Upsilon = \{v_i\}_{i=1}^m$, состоящее из m объектов и множество $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^n$, состоящее из n базовых показателей. Каждому показателю соответствует столбец, а каждому объекту соответствует строка в матрице исходных данных: $A = \{a_{ij} : a_{ij} \in \mathbb{R}^1\}_{i,j=1}^{m,n}$. Вектор-строка матрицы обозначается $\mathbf{a}_i = \langle a_{i1}, \dots, a_{in} \rangle$, а вектор-столбец обозначается $\mathbf{a}_j = \langle a_{1j}, \dots, a_{mj} \rangle$. Нормированная матрица, см. (1.4), обозначается \bar{A} , её строка и столбец соответственно $\bar{\mathbf{a}}_i$ и $\bar{\mathbf{a}}_j$. Центрированная матрица, см. (1.5), обозначается \tilde{A} , её строка и столбец соответственно $\tilde{\mathbf{a}}_i$ и $\tilde{\mathbf{a}}_j$. Регуляризованный линейный оператор, псевдообратный оператору A обозначается A^+ .

Также каждому объекту v_i из набора Υ поставлен в соответствие интегральный индикатор $q_i : q_i \in \mathbb{R}^1$. Вектор $\mathbf{q} = \langle q_i \rangle_{i=1}^m$ называется интегральным индикатором объектов. Каждому показателю ψ_j поставлен в соответствие его вес $w_j : w_j \in \mathbb{R}^1$. Вектор $\mathbf{w} = \langle w_i \rangle_{i=1}^n$ называется весами показателей. Вектор \mathbf{q} принимает значения в области $Q \subseteq \mathbb{R}^m$, а вектор \mathbf{w} принимает значения в области $W \subseteq \mathbb{R}^n$. В данной работе используются векторные обозначения интегральных индикаторов и весов показателей. Экспертные оценки интегральных индикаторов и весов обозначаются соответственно \mathbf{q}_0 и \mathbf{w}_0 . Согласованные интегральные индикаторы и веса обозначаются $\hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{w}}$. Оператор согласования Φ переводит тройку $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ в тройку $(\hat{\mathbf{q}}_0, \hat{\mathbf{w}}_0, A)$. В зависимости от процедуры согласования (см. раздел 2), определяемой оператором согласования Φ , согласованные интегральные индикаторы и веса объектов обозначаются: $(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha); (\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma); (\mathbf{q}_\tau, \mathbf{w}_\tau)$. Элементы интегрального индикатора \mathbf{q}_s обозначаются $\mathbf{q}_s = \{q_{s1}, \dots, q_{sm}\}$. Величины $\alpha \in [0, 1], \gamma^2 \in [0, \infty]$ — параметры согласования, а величины $\varepsilon^2, \delta^2 \in [0, \infty]$ — мера несогласованности экспертных оценок.

При кластеризации объектов вектор, описывающий ζ -й объект обозначают

$\mathbf{a}_\zeta : \mathbf{a}_\zeta \in S_\xi$, где S_ξ — ξ -й кластер. Множество кластеров, содержащее непересекающиеся множество векторов $\mathbf{a}_\zeta \in A$, образует дерево T . Фактическая размерность элементов ξ -го кластера S_ξ^p равна p . Каждому элементу кластера можно также поставить в соответствие интегральный индикатор $q_{\xi\zeta} \in \mathbb{R}$, и $\mathbf{q}_\xi = \langle q_{\xi\zeta} \rangle_{\zeta=1}^{n_\xi}$, где n_ξ — мощность данного кластера. Иерархический интегральный индикатор Θ есть множество пар $\{(\theta_\xi, \mathbf{q}_\xi)\}_{\xi=1}^k$, где k — количество кластеров и $\theta_\xi \in \mathbb{R}$ — интегральный индикатор, характеризующий ξ -й кластер.

Для опроса экспертов была введена шкала, в которой эксперты выставляли оценки $G = \{g_{ij} : g_{ij} \in \mathbb{R}^1, i \in \{1, \dots, m\}\}_{j=1}^n$ и матрица парных сравнений $P = \{p_{ij} : p_{ij} \in \{0, -1, 1\}, p_{ij} = -p_{ji}\}_{i,j=1}^{n,n}$.

Множество целых чисел обозначается \mathbb{Z} , множество целых положительных чисел обозначается \mathbb{Z}_+ . Множество действительных чисел обозначается \mathbb{R} , декартово произведение n множеств действительных чисел обозначается \mathbb{R}^n . Запись $i \in \{1, \dots, n\}$ означает, что переменная i принимает значение произвольного элемента множества $\{1, \dots, n\}$. Запись $i = 1, \dots, n$ означает, что переменная i последовательно принимает значения от 1 до n .

Список таблиц

1	Требования, предъявляемые к матрице исходных данных при выполнении различных процедур нахождения интегрального индикатора	16
2	Данные ежегодного отчета заповедников. Раздел “Охрана”	62
3	Экспертные оценки объектов. Раздел “Охрана”	65
4	Матрица парных сравнений объектов, пример	66
5	Экспертные оценки весов показателей. Раздел “Охрана”	67
6	Расстояния от согласованных векторов до начальных	83
7	Ранжирование заповедников по значению интегрального индикатора	86

Список иллюстраций

1	Итеративная процедура τ -согласования	40
2	Иерархическая система интегральных индикаторов	59
3	Соотношение между антропогенной нагрузкой и резистивностью природных территорий. Составитель Н. А. Соболев [39].	69
4	Линейная зависимость между антропогенной нагрузкой и логарифмом площади заповедников	71
5	Сингулярные числа матрицы исходных данных	71
6	Норма векторов-строк в различных метриках	73
7	Сопоставление интегральных индикаторов, полученных различными способами	74
8	Дисперсия мнений экспертов при оценке интегральных индикаторов	75
9	Дисперсия мнений экспертов при оценке весов показателей	76
10	Изменение весов показателей и интегрального индикатора при различных значениях параметра α	78
11	Зависимость расстояний ε и δ от параметра α	79
12	Зависимость расстояний ε и δ от параметра γ^2	80
13	Изменение весов показателей и интегрального индикатора при различных значениях параметра γ^2	81
14	Сравнение результатов работ процедур α -согласования и γ^2 -согласования	82
15	Приближение экспертных оценок \mathbf{w}_0 вычисленными оценками $A^+\mathbf{q}_0$ при значении параметра $\epsilon^2=1$	82
16	Сравнение результатов, полученных при помощи процедур α - и γ^2 -согласования.	84