ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

С. А. Айвазян, В. В. Шакин, В. В. Стрижов
ЦЭМИ РАН, ВЦ им. А. А. Дородницына РАН

Аннотация

Рассмотрена обратная задача макроэкономического управления, т. е. задача определения множества таких траекторий управляемых переменных (инструментов экономической политики), которые обеспечивают выход ключевых индикаторов социально-экономического развития страны на заданные уровни за определенное время. В качестве модели объекта управления выбрана эконометрическая модель экономики России.

Задачи лиц принимающих решения

1) мониторинг изменения индикаторов социально-экономического развития;

2) предварительная оценка последствий изменений в бюджетной, налоговой, социальной и др. политиках;

3) прогноз социально-политического развития;

4) подбор оптимальных воздействий инструментов социально-экономической политики.

Общая постановка задачи

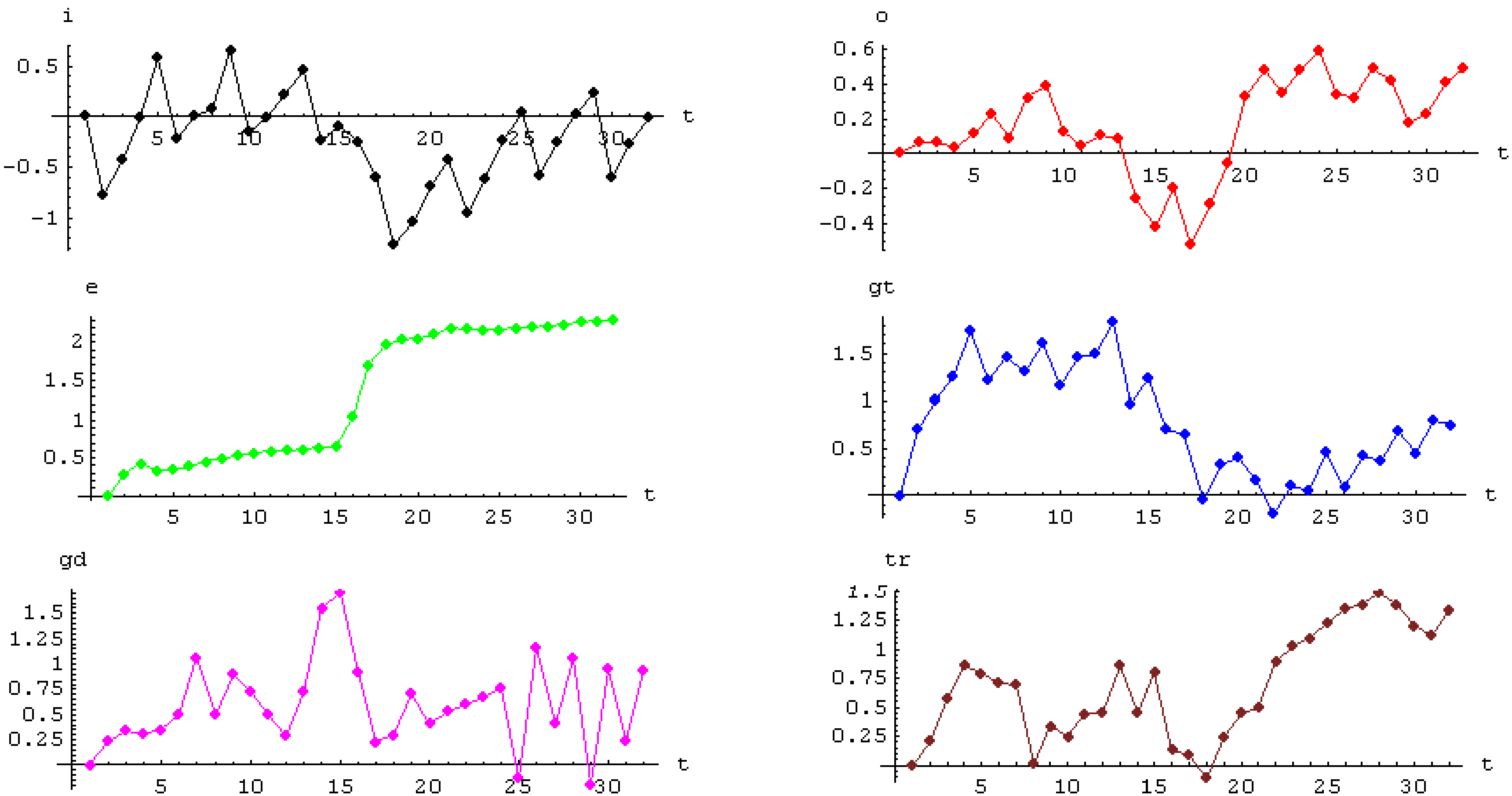
Состояние объекта управления в момент времени t — $Y_t = (y_t^{(1)}, ..., y_t^{(m)})^T$,
управляемые воздействия — $U_t = (u_t^{(1)}, ..., u_t^{(k)})^T$,
неуправляемые воздействия — $Z_t = (z_t^{(1)}, ..., z_t^{(l)})^T$.

Задача. Подобрать такую последовательность управляющих воздействий $(U_{t_0}, ..., U_{t_n})$, при ограничениях $U_t \in \Delta U_t$, которая бы при некотором внешнем сценарии $(Z_{t_0}, ..., Z_{t_n})$ обеспечивала бы через n шагов состояние $\bar{Y}_{t_n} \in \Delta Y_{t_n}$, иначе, которая бы обеспечивала $\min ||Y_{t_n} - \bar{Y}_{t_n}||^2$.

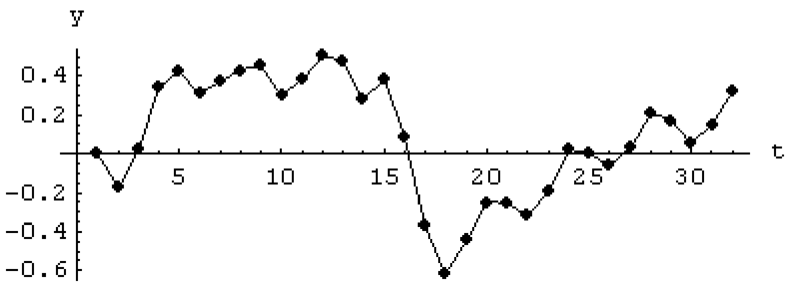
Описание переменных модели

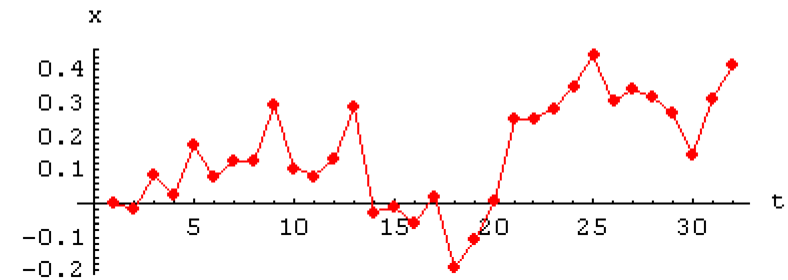
Управляемые переменные	`gt` — государственные социальные расходы, млрд. руб., `tr` — средневзвешенные тарифы на экспорт, млрд. руб.
Неуправляемые переменные	`i` — инвестиции, млрд. руб., `o` — цены на нефть, долл. за баррель, `e` — курс доллара США, руб., `gd` — обслуживание государственного долга, млрд. руб.
Переменные состояния	`y` — ВВП, млрд. руб., `x` — экспорт, млрд. долл., `p` — инфляция, % к предыдущему периоду, `n` — доходы населения, млрд. руб., `m` — импорт, млрд. долл., `co` — конечное потребление, млрд. руб.

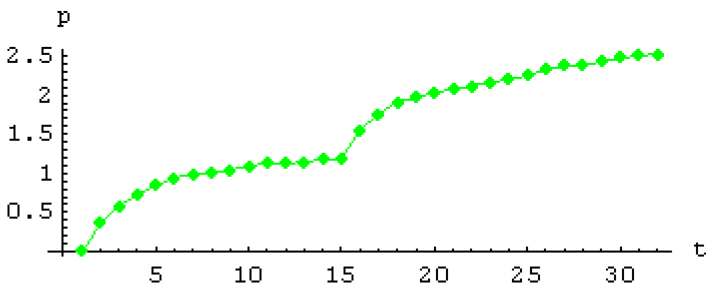
Экзогенные переменные

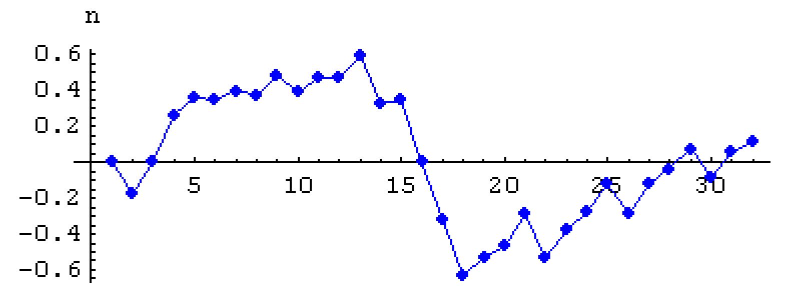


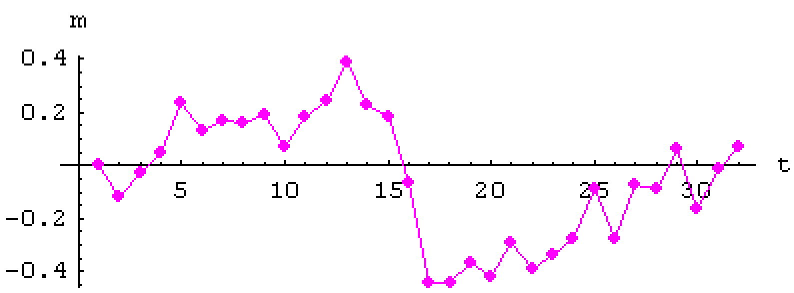
Эндогенные переменные

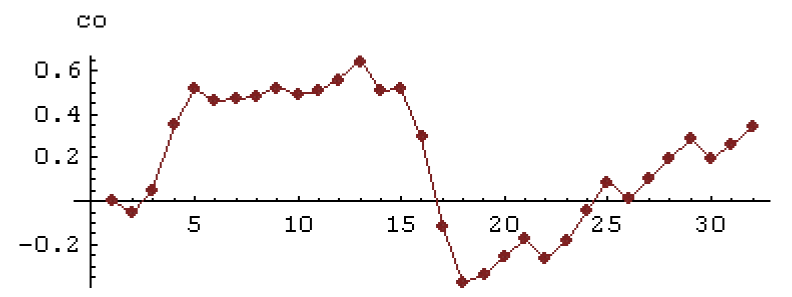












Одновременные линейные уравнения

В качестве модели предложена система уравнений

$$\mathtt{y} = \mathtt{c}_{20} + \mathtt{c}_{21}\mathtt{i}_{(-4)} + \mathtt{c}_{22}\mathtt{D}(\mathtt{e}) + \mathtt{c}_{23}\mathtt{y}_{(-1)} + \mathtt{c}_{24}\mathtt{gd}_{(-2)} + \mathtt{c}_{25}\mathtt{dummy} + \varepsilon_2,$$

$$\mathtt{x} = \mathtt{c}_{10} + \mathtt{c}_{11}\mathtt{e} + \mathtt{c}_{12}\mathtt{tr} + \mathtt{c}_{13}\mathtt{o}_{(-1)} + \mathtt{c}_{14}\mathtt{y}_{(-1)} + \mathtt{c}_{15}\mathtt{x}_{(-1)} + \mathtt{c}_{16}\mathtt{dummy} + \varepsilon_1,$$

$$\mathtt{p} = \mathtt{c}_{30} + \mathtt{c}_{31}\mathtt{e}_{(-1)} + \mathtt{c}_{32}\mathtt{o}_{(-1)} + \mathtt{c}_{33}\mathtt{dummy} + \varepsilon_3,$$

$$\mathtt{n} = \mathtt{c}_{40} + \mathtt{c}_{41}\mathtt{y} + \mathtt{c}_{42}\mathtt{n}_{(-1)} + \mathtt{c}_{43}\mathtt{gt} + \mathtt{c}_{44}\mathtt{dummy} + \varepsilon_4,$$

$$\mathtt{m} = \mathtt{c}_{50} + \mathtt{c}_{51}\mathtt{p} + \mathtt{c}_{52}\mathtt{y} + \mathtt{c}_{53}\mathtt{m}_{(-1)} + \mathtt{c}_{54}\mathtt{x} + \mathtt{c}_{55}\mathtt{dummy} + \varepsilon_5,$$

$$\mathtt{co} = \mathtt{c}_{60} + \mathtt{c}_{61}\mathtt{p} + \mathtt{c}_{62}\mathtt{y} + \mathtt{c}_{63}\mathtt{m} + \mathtt{c}_{64}\mathtt{n} + \mathtt{c}_{65}\mathtt{co}_{(-1)} + \mathtt{c}_{66}\mathtt{dummy} + \varepsilon_6,$$

где $\mathtt{c}_{\mathtt{ij}}$ — параметры модели, добавочная переменная $\mathtt{dummy} \in \{0, 1\}$ отражает состояние экономики до и после сентября 1998г., ε — авторегрессионный остаток.

Векторная авторегрессия

Рекурсивная форма (построена по ранее предложенной модели):

$Y_t = \sum_{\tau=0}^{r}(A_\tau Y_{t-\tau} + C_\tau U_{t-\tau} + F_\tau Z_{t-\tau}) + M + \varepsilon_t.$

Приведенная форма:

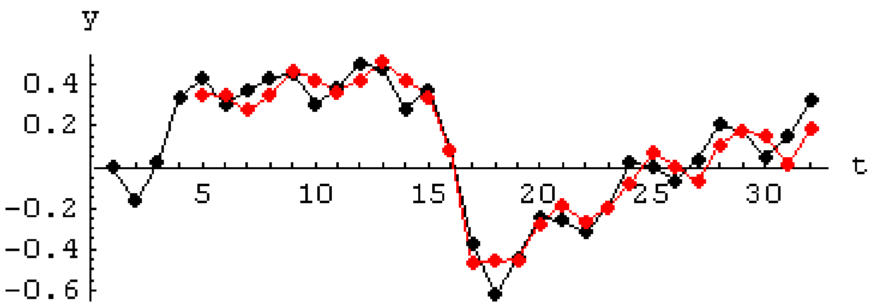
$$Y_t = (I - A_0)^{-1}(C_0 U_t + F_0 Z_t + \\ + \sum_{\tau=1}^{r}(A_\tau Y_{t-\tau} + C_\tau U_{t-\tau} + F_\tau Z_{t-\tau}) + M + \varepsilon_t).$$

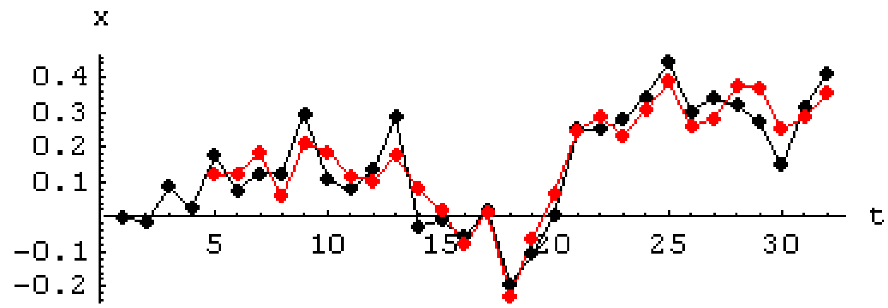
Редуцированная форма:

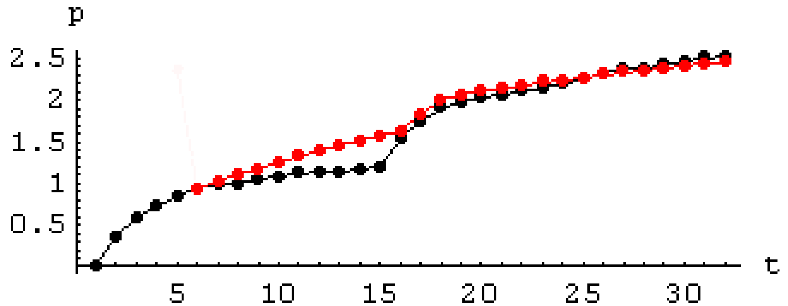
$Y_t = G_r U_t + H_{t,r}.$

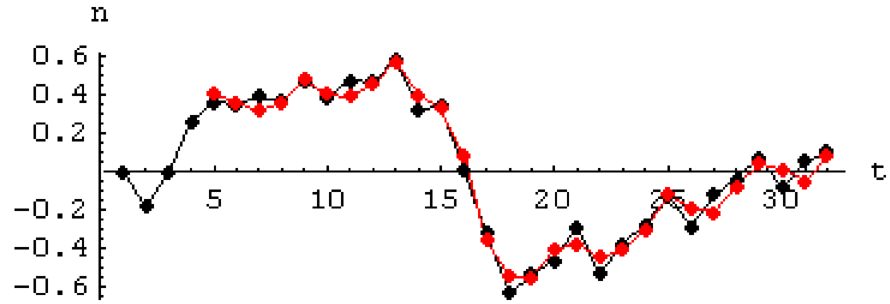
τ=		Y' =	y	x	p	n	m	co	Y=
			0	0	0	c41	c52	c62	y
			0	0	0	0	c54	0	x
0		A_0^T =	0	0	0	0	c51	c61	p
			0	0	0	0	0	c64	n
			0	0	0	0	0	c63	m
			0	0	0	0	0	0	co
			c23	c14	0	0	0	0	y
			0	c15	0	0	0	0	x
	A^T =		0	0	0	0	0	0	p
1		A_1^T =	0	0	0	c42	0	0	n
			0	0	0	0	c53	0	m
			0	0	0	0	0	c65	co
2		A_2^T =				0			
3		A_3^T =				0			
4		A_4^T =				0			
	U^T =	U_0^T =	0	0	0	**c43**	0	0	gt
			0	**c12**	0	0	0	0	tr
			0	0	0	0	0	0	l
			0	0	0	0	0	0	o
0		B_0^T =	c22	c11	0	0	0	0	e
			0	0	0	0	0	0	gd
			c25	c16	c33	c44	c55	c66	dummy
			0	0	0	0	0	0	l
1	B^T =	B_1^T =	0	c13	c32	0	0	0	o
			c22	0	c31	0	0	0	e
			0	0	0	0	0	0	gd
						0			
2		B_2^T =	c24	0	0	0	0	0	gd
3		B_3^T =				0			
4		B_4^T =	c21	0	0	0	0	0	l
						0.			
		M =	c20	c10	c30	c40	c50	c60	

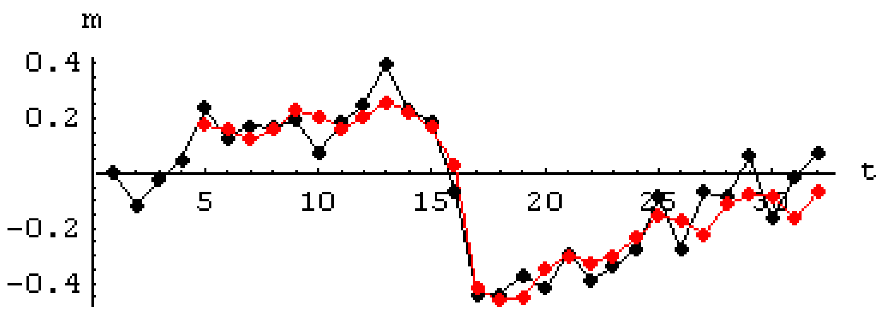
Модельные временные ряды

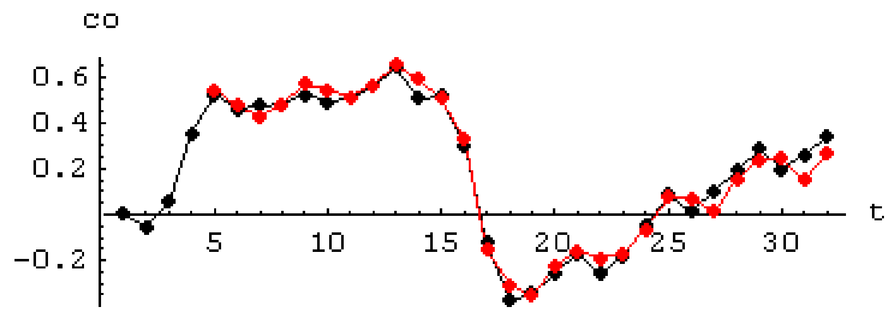










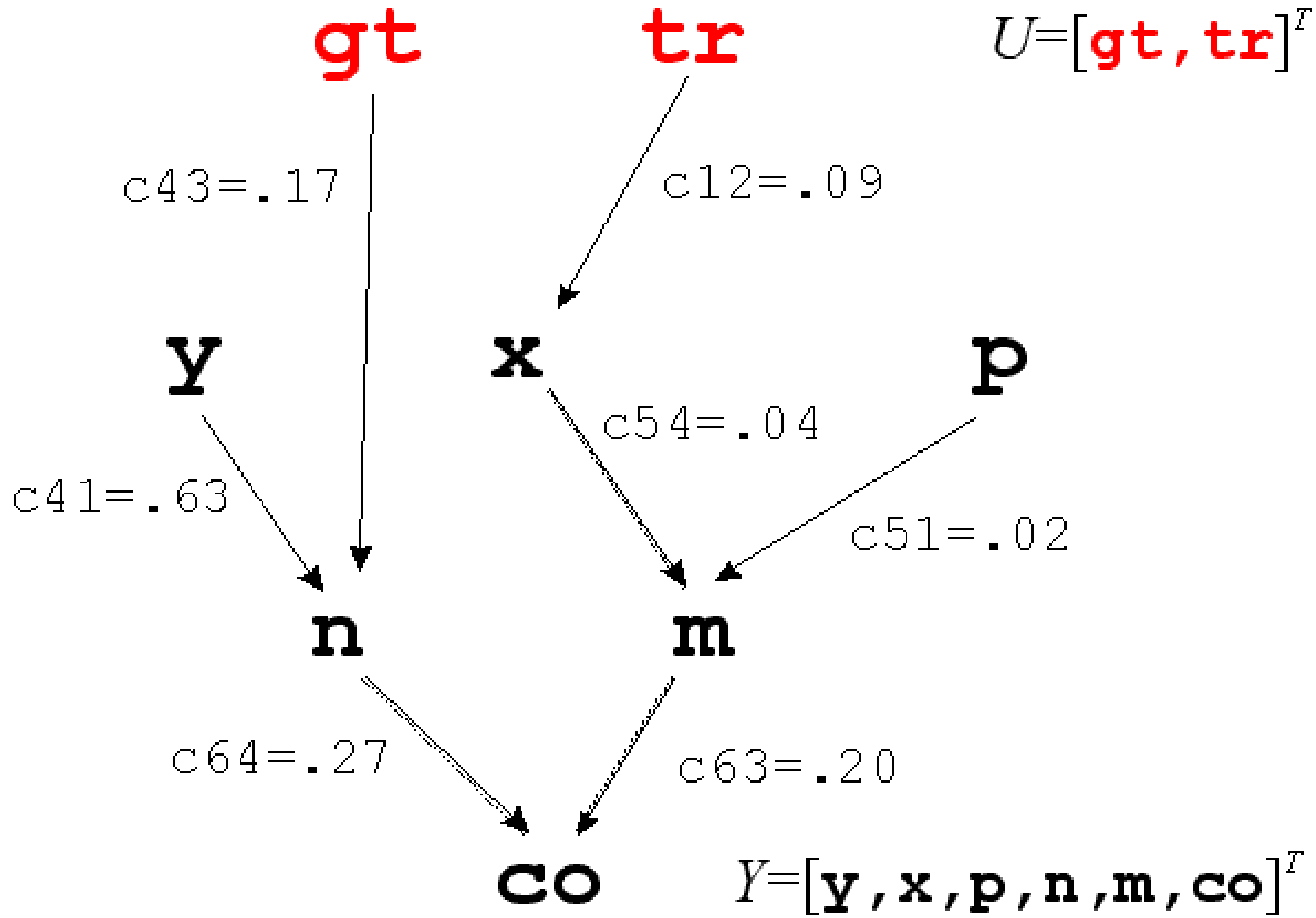


Решение обратной задачи

Уравнение обратной задачи — $U_t = G_r^+(Y_t - H_{t,r})$. Значение вектора $H_{t,r}$ вычисляется каждый раз при прогнозе Y_t для ранее заданного r.

Матрица G^+ получается с помощью сингулярного разложения $G^+ = V^T\Lambda^{-1}W$. Справедливо равенство $G^+G = V\Lambda^{-1}W^TW\Lambda V^T = I_k$.

Связи между переменными



Задача наискорейшего приближения

1. Задан сценарий внешних воздействий $(Z_{t_0}, ..., Z_{t_n})$.
2. Заданы ограничения ΔU_t на управляющие воздействия U_t.
3. Задан целевой вектор $\bar{Y}_n$.

Требуется подобрать такие векторы управления $(U_{t_0}, ..., U_{t_n})$, при ограничениях $U_t \in \Delta U_t$, которые бы минимизировали расстояние между целевым вектором $\bar{Y}_{t_n}$ и вектором Y_t на каждом шаге.

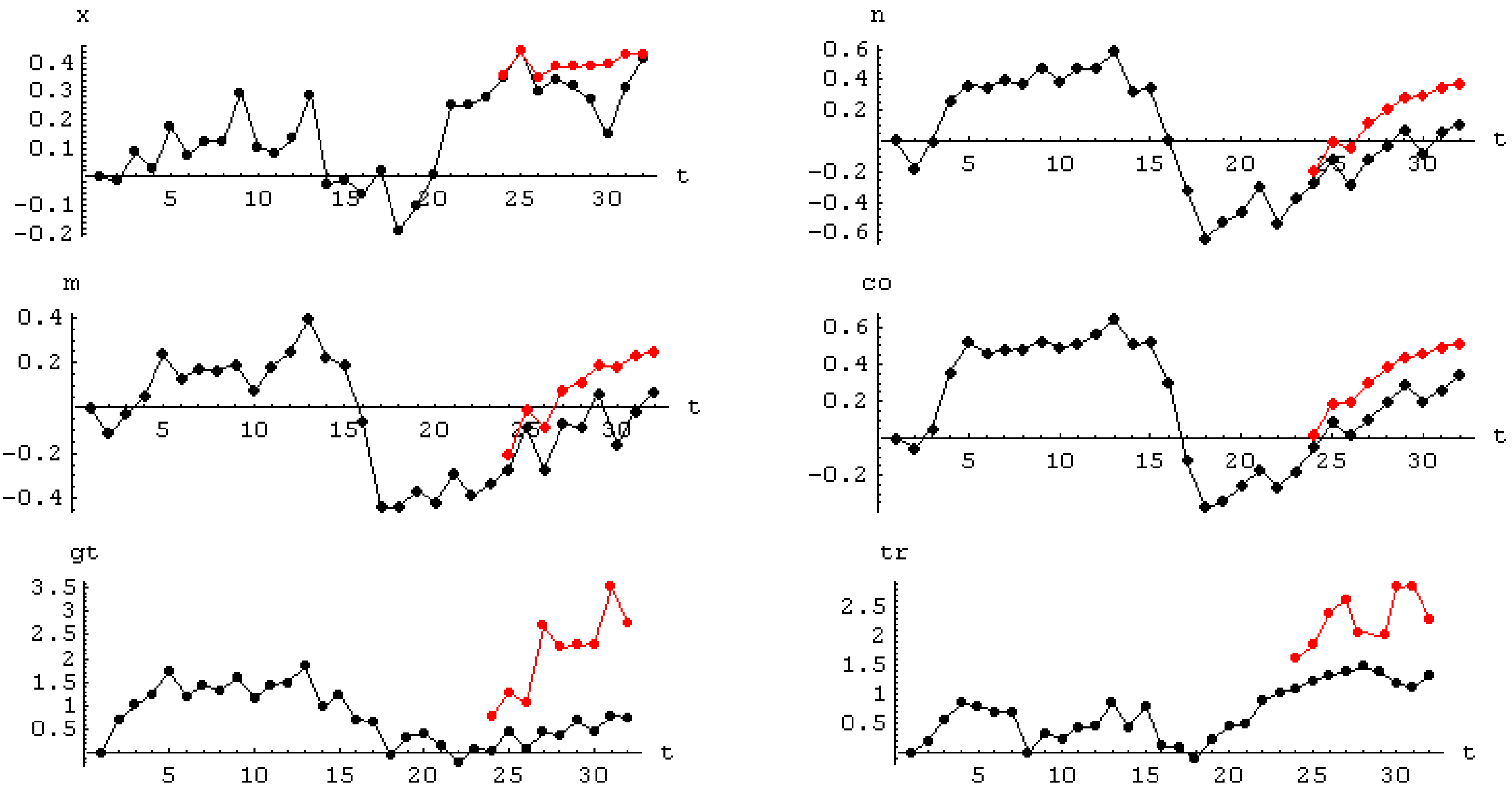
Алгоритм наискорейшего приближения

На каждом шаге отыскивается такое новое состояние $Y_{t+1} = \alpha \bar{Y}_{t_n} + (1-\alpha) Y_t$ объекта управления, что

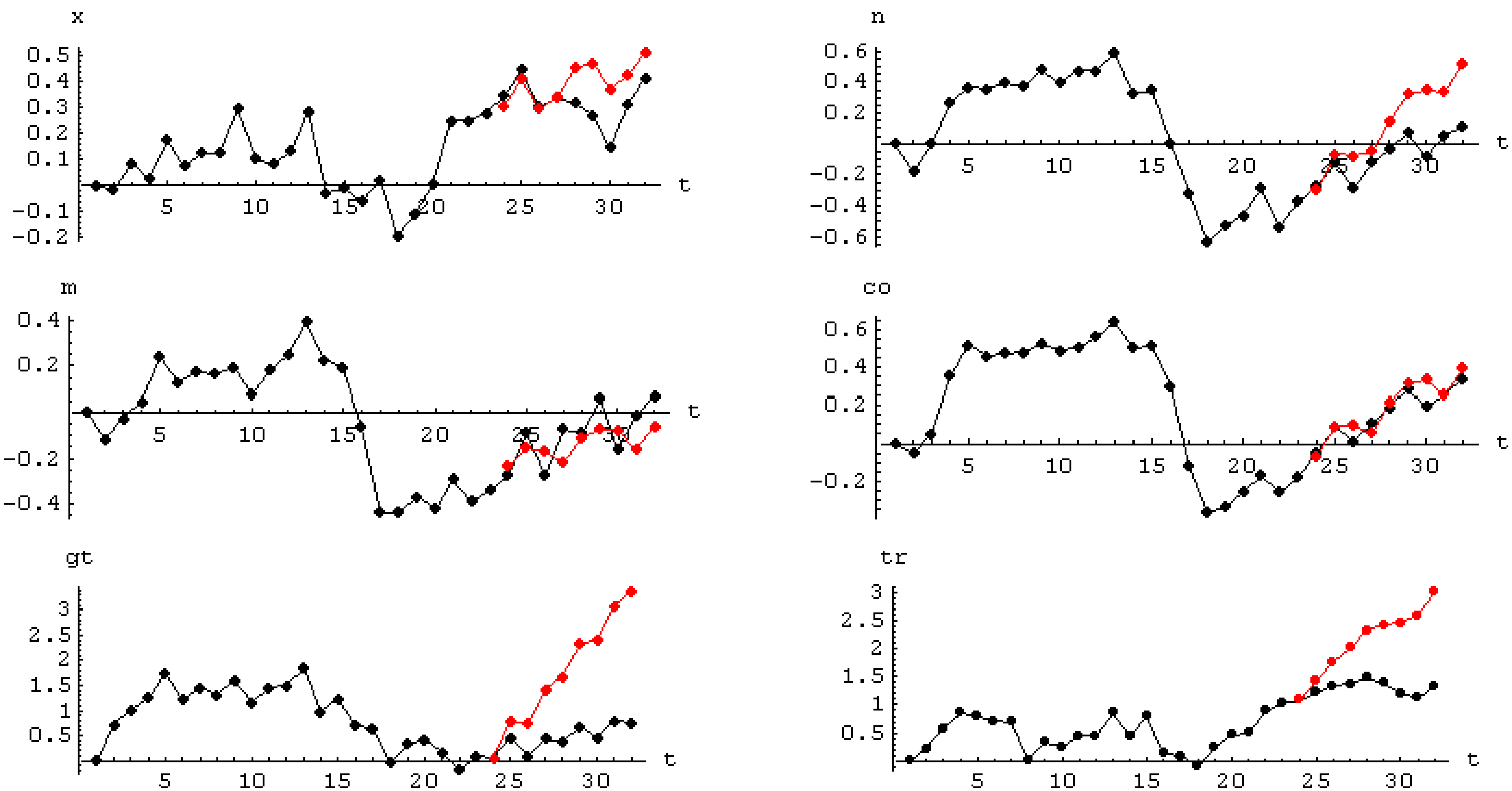
$$\alpha = \arg \min_{U_{t+1} \in \Delta U_{t+1}} ||\bar{Y}_{t_n} - Y_{t+1}||^2,$$

где параметр $\alpha \in [0,1]$.

Временные ряды наискорейшего приближения



Временные ряды максимальных затрат управления



Задача оптимального управления

1. Задан сценарий внешних воздействий $(Z_{t_0}, ..., Z_{t_n})$.
2. Заданы ограничения ΔU_t на управляющие воздействия U_t.
3. Задан целевой вектор $\bar{Y}_n$.

Требуется найти такую последовательность векторов $(U_{t_0}, ..., U_{t_n})$, при ограничениях $U_t \in \Delta U_t$, которая приводила бы объект управления из начального состояния Y_{t_0} в целевое состояние $\bar{Y}_{t_n}$ за заданное число шагов при минимальной стоимости управления, $C^*(U_{t_0}, ..., U_{t_n}) \rightarrow \min$.

Принцип оптимальности Р. Беллмана

Любое оптимальное управление может быть образовано только оптимальными управляющими воздействиями на каждом шаге.

Иначе, при любом состоянии системы перед очередным шагом необходимо выбирать управление так, чтобы стоимость управления на данном шаге и стоимость управления на всех последующих шагах была минимальной.

Алгоритм оптимального управления

Под действием управления U_t объект принимает состояние $Y_t = h_t(U_t, Y_{t-1}) = G_r U_t + H_{t,r}$, причем стоимость управления на каждом шаге определяется как $f(U_t, Y_{t-1})$.

Рекуррентное уравнение динамического программирования выражает стоимость $C_t(Y)$ условного оптимального управления начиная с t-го шага до конца через уже известную функцию $C_{t+1}(Y)$:

$$C_t(Y) = \min_{U_t \in \Delta U_t} [f(U_t, Y_{t-1}) + C_{t+1}(h_t(U_t, Y_{t-1}))].$$

Алгоритм оптимального управления

1. Производится условная оптимизация последнего шага t_n для множества состояний Y_{t_n-1} таких, что $Y_{t_n} = h(U_{t_n}, Y_{t_n-1})$ при $U_{t_n} \in \Delta U_{t_n}$ и вычисляется условная стоимость

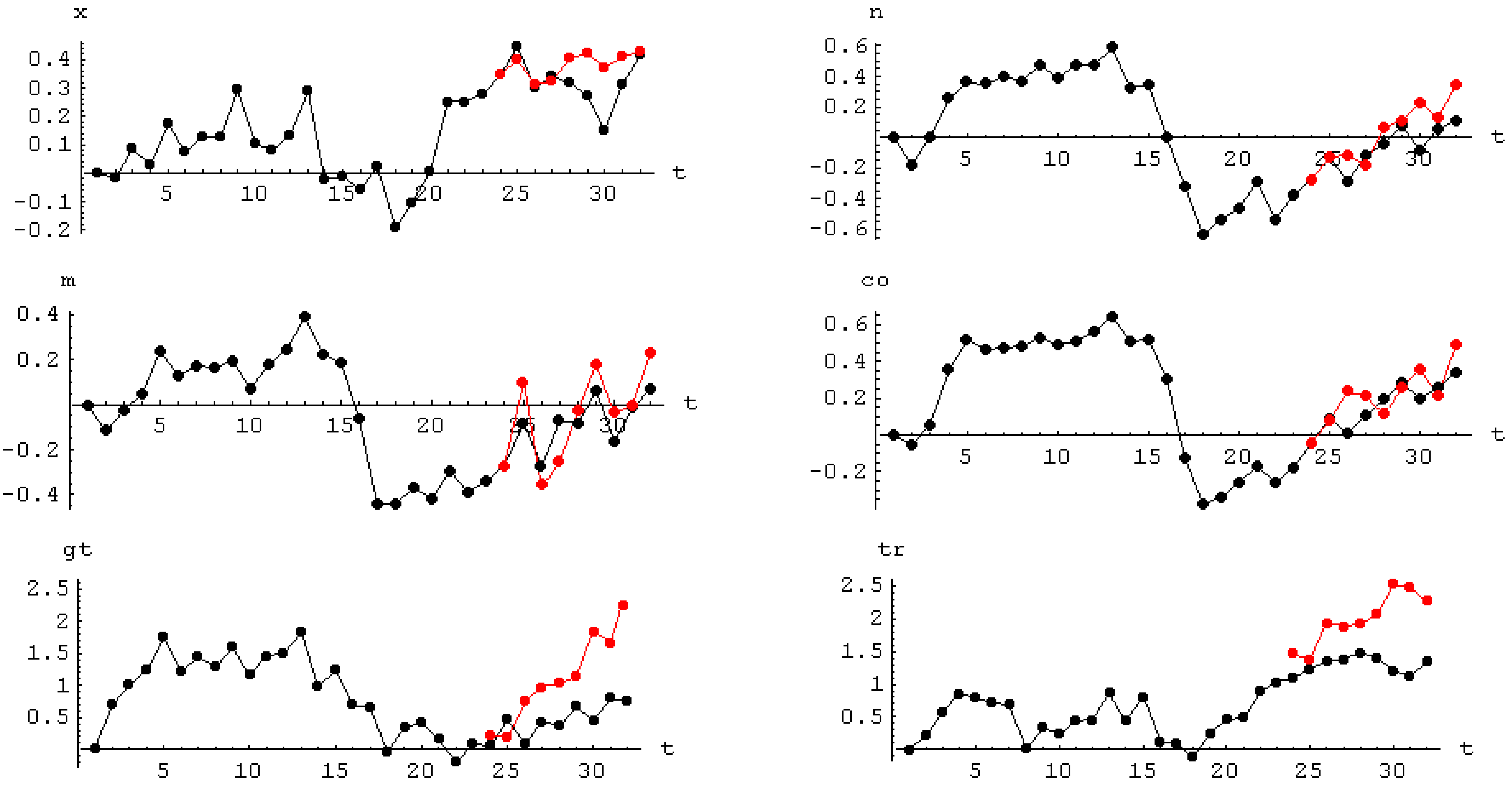
$$C_{t_n}(Y_t) = \min_{U_{t_n} \in \Delta U_{t_n}} (f(U_{t_n}, Y_{t_n-1}))$$

и находится оптимальное управление U_{t_n}.

2. Производится условная оптимизация для всех t, $t_n - 1 > t > t_0$.

3. Так как начальное состояние Y_{t_0} известно, то искомая величина $C^* = C^*(U_{t_0}, ..., U_{t_n}) = C_1(Y_{t_0})$.

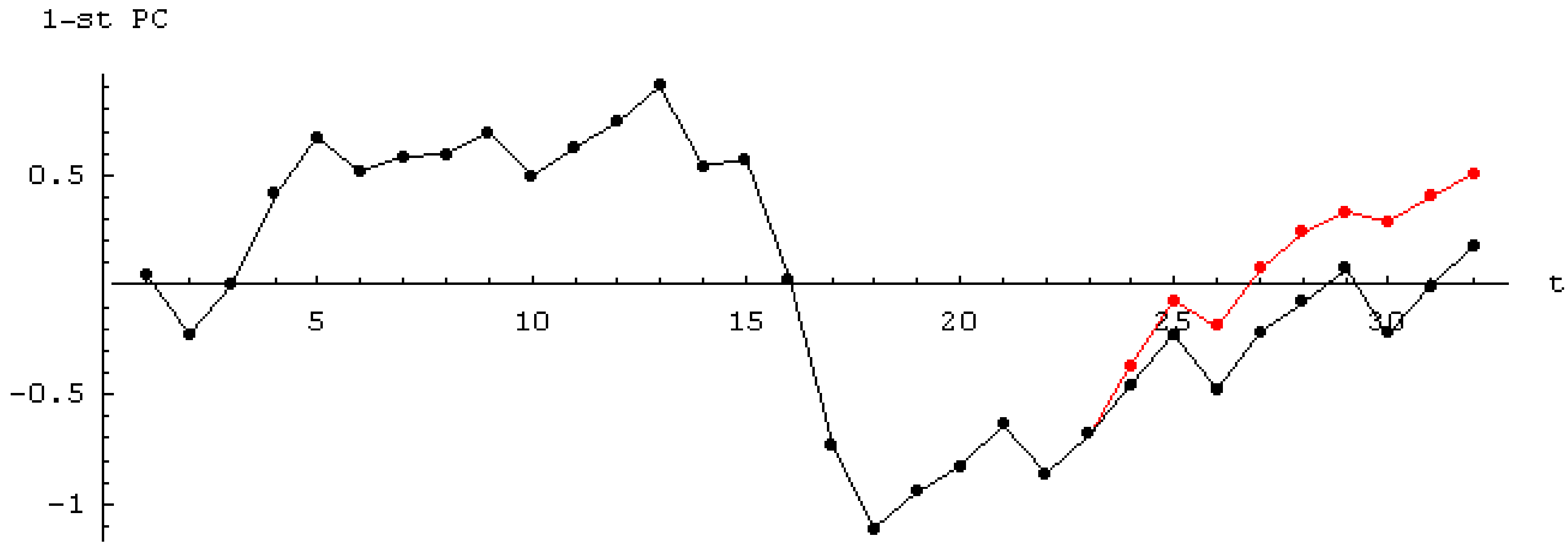
Временные ряды оптимального управления



Заключение

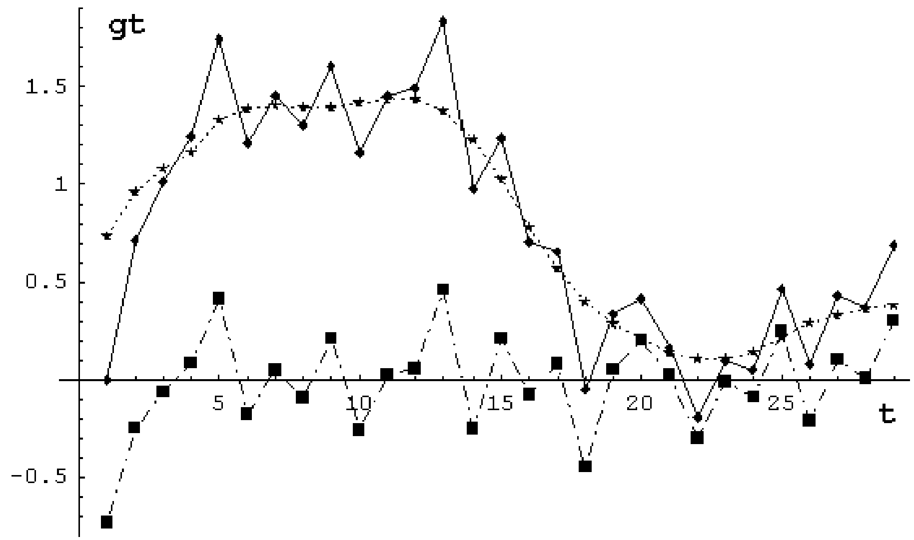
Существует множество различных траекторий $(Y_{t_0}, ..., Y_{t_n})$, которые позволяют достичь целевое состояние объекта управления $\bar{Y}_{t_n}$. Стоимость управления при выборе траектории можно оптимизировать. Не всегда максимальная стоимость управления приводит к наилучшему результату.

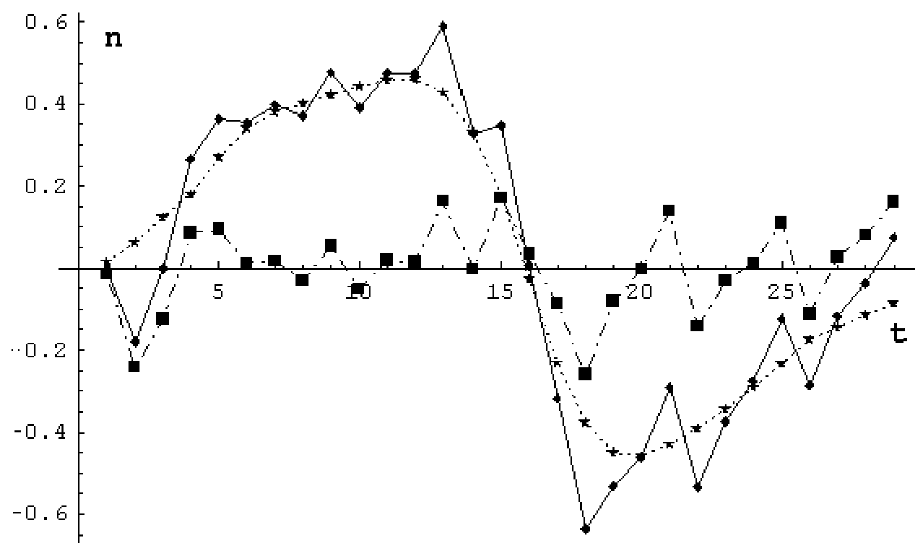
Индикатор состояния объекта управления



Приложение 1

Разложение исходных временных рядов





Приложение 2