Об одной задаче макроэкономического управления*

© 2003 С. А. Айвазян, В. В. Стрижов, В. В. Шакин

2 апреля 2004 г.

Аннотация

Рассмотрена так называемая *обратная задача* макроэкономического управления, т. е. задача определения множества таких траекторий управляемых переменных (инструментов экономической политики), которые, — при заданных ограничениях на диапазон варьирования и гладкость управляющих воздействий, — обеспечивают выход ключевых индикаторов социально-экономического развития страны (региона) на заданные уровни за определенное число тактов (кварталов, лет). В качестве модели объекта управления выбрана эконометрическая модель экономики России в форме системы одновременных уравнений (см. СОУ-модель в [1]).

Введение

Современным технологиям процессов принятия макроэкономических управленческих решений доступен достаточно широкий и богатый инструментарий. Нередко этот инструментарий придается органу, принимающему решения (ОПР), в форме более или менее продвинутого *ситуационного центра*, в спектр задач которого входит:

(i) отслеживать в режиме мониторинга динамику и основные тенденции в изменении ключевых индикаторов социально-экономического развития страны и одновременно, — инструментов и параметров социально-экономической политики и внешней среды;

(ii) осуществлять адекватную *предварительную оценку* последствий планируемых изменений в бюджетной, кредитно-денежной, налоговой, социальной и других политиках с точки зрения их влияния на ключевые индикаторы социально-экономического развития страны, федерального округа, отдельного субъекта Российской Федерации;

(iii) строить кратко-средне и долгосрочные прогнозы социально-политического развития страны и ее отдельных частей;

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№00-01-00197а и 01-06-80457а.

(iv) подбирать такие воздействия инструментов социально-экономической политики, которые обеспечивали бы выход ключевых индикаторов за определенное число тактов времени.

Задача (i) относится к типу *описательных* и обслуживается современными средствами многомерного статистического анализа с акцентом на подходящие средства визуализации [3].

Решение задач (ii) и (iii) основано на моделях зависимостей, связывающих значения ключевых индикаторов социально-экономического развития страны, с одной стороны, с параметрами экономической политики и внешней среды, — с другой. Эти модели могут быть разной природы: набор отдельных уравнений регрессии, системы одновременных уравнений, векторные авторегрессионные модели [1], так называемые "вычислительные модели" [4], имитационные модели, наконец, модели, построенные с помощью комбинирования упомянутых подходов.

Задачу (iv) часто называют *обратной*. Она, действительно, является в определенном смысле обратной по отношению к задачам типа (ii) и (iii), в которых значения ключевых индикаторов социально-экономического развития вычисляются по заданным значениям параметров (переменных) экономической политики и внешней среды. В задаче же (iv) мы должны, грубо говоря, по заданным значениям ключевых индикаторов и спрогнозированным значениям параметров внешней среды восстановить соответствующие значения переменных экономической политики. *Именно этой задаче и посвящена настоящая работа.* Заметим сразу, что искомое множество решений данной задачи может оказаться пустым.

1 Модель управления

Для описания *модели управления* введем следующие понятия.

Субъект управления — орган (лицо), принимающий решение. Другими словами, под субъектом управления мы будем понимать орган (в частном случае состоящий из одного лица), который определяет цели управления, выбирает управляющее воздействие, наблюдает за последствиями управления и оценивает результат.

Объект управления — социально-экономическая система (страна, регион), эффективность функционирования которой описывается набором результирующих (эндогенных) переменных $Y = [y^{(1)}, ..., y^{(m)}]^T$. Значения этих показателей $Y_t = [y_t^{(1)}, ..., y_t^{(m)}]^T$ в некоторый момент времени t *определяют состояние объекта управления*. Объект изменяет свое состояние под влиянием *управляющих воздействий* $U_t = [u_t^{(1)}, ..., u_t^{(p)}]^T$. На состояние объекта влияют также *переменные* $Z_t = [z_t^{(1)}, ..., z_t^{(k)}]^T$ *внешней среды*, в которую он погружен. Совокупность управляемых (или частично управляемых) переменных U и переменных внешней среды Z будем называть *экзогенными переменными* X. При отсутствии *экспертно задаваемой* целевой функции (скалярного измерителя степени эффективности функционирования системы) $\varphi(Y)$ мы будем использовать в качестве скалярного *индекса состояния* системы *первую главную компоненту результирующих (эндогенных) переменных.*

$$q = \sum_{i=1}^{m} \theta_{1i}(y^{(i)} - \bar{y}^{(i)}). \qquad (1)$$

В соотношении (1) вектор $[\theta_{11}, ..., \theta_{1m}]^T$ это собственный вектор ковариационной матрицы Σ_Y результирующих переменных Y, соответствующий *наибольшему* ее значению, а $\bar{y}^{(1)}, ..., \bar{y}^{(m)}$ — средние значения наблюдаемых результирующих переменных (усреднение — по базовому наблюдаемому периоду времени).

Пусть мы располагаем данными (U_t, Z_t, Y_t) о поведении объекта в течение t_0 тактов времени $t = 1, 2, ..., t_0$ и пусть заданы *горизонт управления* — число тактов времени n и множество допустимых траекторий $U(t_1, t_n)$ в p-мерном фазовом пространстве управляющих воздействий. Допустимость траектории определяется ограничениями на общий диапазон и гладкость варьирования переменных $u^{(1)}, ..., u^{(p)}$ на рассматриваемом отрезке времени $t = t_1, ..., t_n$, так, что элементом множества $U(t_1, t_n)$ является p-мерная траектория $U^{(t_1,t_n)} = \{[u_t^{(1)}, ..., u_t^{(p)}]^T,\ t = t_1, ..., t_n\}$.

Пусть, наконец, мы располагаем целевыми значениями результирующих переменных $\bar{Y}_{t_n}$ или одного из скалярных индикаторов $\bar{\varphi}_{t_n} = \varphi(Y_{t_n})$ или $q_{t_n} = \sum_{j=1}^{m} \theta_{1j}(y_{t_n}^{(j)} - \bar{y}^{(j)})$, а также *допустимыми окрестностями* этих значений, — соответственно $\varepsilon(\bar{Y}_{t_n})$, $\varepsilon(\bar{\varphi}_{t_n})$ или $\varepsilon(\bar{q}_{t_n})$.

Тогда обратная задача сводится к определению такого подмножества $\Delta U(t_1, t_n)$ множества допустимых траекторий $U(t_1, t_n)$, которые при заданных (спрогнозированных) значениях переменных внешней среды $Z_t, t = t_1, ..., t_n$ обеспечивали бы следующие включения:

$$\left.\begin{array}{rl} & Y_{t_n}(U_{t_n}, Z_{t_n}) \in \varepsilon(\bar{Y}_{t_n}) \\ \text{или} & Y_{t_n}(U_{t_n}, Z_{t_n}) \in \varepsilon(\bar{\varphi}_{t_n}) \\ \text{или} & Y_{t_n}(U_{t_n}, Z_{t_n}) \in \varepsilon(\bar{q}_{t_n}) \end{array}\right| \ \text{при } (U_{t_1}, ..., U_{t_n}) \in \Delta U_{(t_1,t_n)}.$$

Таким образом, для решения рассматриваемой задачи макроэкономического управления необходимо выполнение следующих этапов.

1. Выбираются субъект и объект управления. Составляется список управляющих воздействий, или альтернатив управления. Выбирается цель управления, которая в дальнейшем будет служить ориентиром (критерием) для принятия решений. На основании отчетов о функционировании объекта управления назначаются три типа переменных:

   – управляемые переменные U — те переменные, которые зависят непосредственно от принятых альтернатив управления;

   – переменные внешнего воздействия на объект Z: эти переменные не зависят от управления, а определяются внешней средой, так что их значения в моменты $t_1, ..., t_n$ приходится предсказывать, поскольку от них зависит состояние объекта;

– результирующие, определяющие состояние объекта, т. е. те переменные Y, которые характеризуют эффективность функционирования объекта.

Определяется зависимость переменных состояния объекта Y от экзогенных переменных U и Z. Эта зависимость описывается *математической моделью объекта*. Для определения связи между переменными модели выполняется тест причинно-следственной связи Грэнжера, который заключается в следующем. Каждая переменная, включаемая в модель управления либо сама влияет на состояние объекта, либо изменяется под влиянием других переменных. Если изменения переменной a предшествуют изменениям переменной b (при наличии статистической связи между ними), но не наоборот, то переменная b зависит от переменной a. При выборе переменных для модели управления исключаются безразличные переменные — те, от которых не зависит состояние объекта, и которые не изменяются под влиянием других переменных. Таким образом множество переменных разбивается на подмножества управляемых, неуправляемых и зависимых переменных.

Определяется зависимость управляемых переменных U от альтернатив управления. Такая зависимость называется *математической моделью субъекта*. Назначается цель управления; она может задаваться значением вектора состояния $\bar{Y}_{t_n}$ в заданный момент времени t_n, либо значениями скалярных индикаторов $\bar{\varphi}_{t_n}, \bar{q}_{t_n}$, либо их целевыми траекториями.

Результат выполнения вышеописанной процедуры показан в таблице 1.

Объект управления	экономика Российской Федерации
Субъект управления	правительство России
Цель управления	за небольшое число шагов привести показатели экономики в оптимальное состояние, определяемое индикатором
Альтернативы управления	`a` — принять новую программу государственных социальных расходов, `b` — изменить тарификацию экспортируемых товаров.
Управляемые переменные	`gt` — государственные социальные расходы, млрд. руб., `tr` — средневзвешенные тарифы на экспорт, млрд. руб.
Неуправляемые переменные	`in` — инвестиции, млрд. руб., `oi` — цены на нефть, долл. за баррель, `ex` — курс доллара США, руб., `gd` — обслуживание государственного долга, млрд. руб.
Переменные состояния	`y` — ВВП, млрд. руб., `x` — экспорт, млрд. долл., `p` — инфляция, % к предыдущему периоду, `n` — доходы населения, млрд. руб., `m` — импорт, млрд. долл., `co` — конечное потребление, млрд. руб.
Модель объекта	$Y = Y(U, Z)$, где Y — вектор состояния, $Y = [\mathtt{y},\mathtt{x},\mathtt{p},\mathtt{n},\mathtt{m},\mathtt{co}]^T$, U — вектор управления, $U = [\mathtt{gt},\mathtt{tr}]^T$, Z — вектор внешнего воздействия, $Z = [\mathtt{in},\mathtt{oi},\mathtt{ex},\mathtt{gd}]^T$
Модель субъекта	$U = U(\mathtt{a},\mathtt{b})$ строится на основе экспертных оценок влияния принимаемых альтернатив управления на управляемые переменные
Индикаторы состояния объекта	φ, q — скалярные величины, характеризующие состояние объекта управления в целом

Таблица 1: Переменные эконометрической модели экономики России

2 Модель объекта

Модель объекта строится на основе прецедентов — данных о поведении объекта. Эти данные представляются в виде таблицы, в столбцах которой находятся значения показателей объекта, а в строках — отсчеты времени поквартально. Как видно из таблицы 2, состояние экономики описывается двенадцатью показателями. Предыстория, по которой идентифицируется модель составляет семь лет, или 32 отсчета времени.

Date	t	i	oi	ex	gt	gd	tr	y	x	p	n	m	co
4-1994	1	48	15.79	3.2	23.21	3.2	2.24	225	18.9	100	146.34	14.6	91.8
1-1995	2	29.5	16.87	4.26	62.9	5.4	3.69	253	18.6	142.77	162.59	13	115.5
2-1995	3	48.4	16.77	4.92	98.37	6.93	6.14	353	20.6	124.92	224.42	14.2	148.7
3-1995	4	66.2	16.29	4.47	112.52	6.08	7.36	443	19.4	115.21	266.08	15.3	183
4-1995	5	122.8	17.71	4.55	188.75	6.45	7.04	491	22.5	113.02	298.99	18.5	219.4
1-1996	6	57.8	19.74	4.76	115.53	7.77	6.75	456	20.4	110.01	309.51	16.6	216.4
2-1996	7	75.2	17.27	5	154.74	14.46	7.02	509	21.4	105.08	340.06	17.3	230.5
3-1996	8	85.2	21.8	5.27	140.23	8.67	3.75	570	21.4	100.8	348.51	17.2	244.4
4-1996	9	157.8	23.19	5.48	197.81	13.49	5.37	611	25.4	104.57	403.22	17.7	265.3
1-1997	10	73.2	17.92	5.65	130.63	11.67	5.06	539	21	105.29	381.91	15.7	264.5
2-1997	11	85.4	16.52	5.77	179.09	9.51	6.29	594	20.5	103.03	423.86	17.5	274.7
3-1997	12	108.9	17.59	5.81	187.16	7.74	6.38	679	21.6	100.5	426.45	18.7	291.9
4-1997	13	141.3	17.16	5.9	268.2	12.20	9.78	667	25.2	101.81	486.3	21.6	322
1-1998	14	71.9	12.18	6.05	116.27	28.53	6.62	564	18.4	103.03	382.94	18.3	287.6
2-1998	15	83.9	10.35	6.15	153.4	33.50	9.58	632	18.7	101	397.78	17.6	295.7
3-1998	16	107.1	12.89	9.12	133.66	22.94	7.25	699	17.8	143.81	419.34	13.7	353.3
4-1998	17	143.7	9.34	17.48	242.74	21.96	13.36	846	19.3	123.27	581.34	9.4	443.3
1-1999	18	96.8	11.8	22.92	158.19	30.81	14.44	867	15.6	116	553.92	9.4	452.4
2-1999	19	131.1	14.86	24.5	248.29	49.52	21.9	1108	17	107.3	657.74	10.1	499.2
3-1999	20	185.6	21.88	24.82	271.5	37.50	27.4	1358	19	105.6	713.93	9.6	548.4
4-1999	21	256.9	25.4	26.27	223.36	44.93	30.14	1424	24.3	103.9	897.14	10.9	635.2
1-2000	22	165.8	22.43	28.49	170.05	51.84	48.38	1461	24.3	103.94	762.8	9.9	628.4
2-2000	23	230.9	25.5	28.38	226.2	55.68	55.49	1642	25	105.4	891.1	10.4	680.1
3-2000	24	329.6	28.5	27.79	211.9	58.88	58.05	2004	26.7	104.2	962.2	11.1	759.6
4-2000	25	433.2	22.2	27.88	321.76	24.64	66.77	1956	29.5	105.4	1126.3	13.4	874
1-2001	26	241	21.8	28.61	224.19	90.92	76.82	1886	25.6	107.1	981.9	11.1	830.2
2-2001	27	338.9	25.7	29	323.37	43.40	80.83	2116	26.6	105.3	1176.7	13.6	922.7
3-2001	28	447.7	24.1	29.33	307.2	84.10	90.44	2542.5	26	101.1	1291.9	13.4	1019.7
4-2001	28	568.00	18.77	29.8	428.86	24.61	83.22	2489.5	24.8	104.1	1467.62	15.5	1139.5
1-2002	30	254.80	19.83	30.79	350.91	79.80	71.66	2277.8	21.9	105.5	1293.49	12.4	1076.5
2-2002	31	355.00	23.7	31.28	502.7	39.95	67.13	2564	26.1	103.4	1508.99	14.8	1161.7
3-2002	32	465.90	25.83	31.56	485.62	79.56	84.05	3064.8	28.62	101.2	1609.55	15.65	1271.5

Таблица 2: Пример таблицы данных о состоянии экономики России

В эконометрической модели переменные-элементы векторов U, Z и Y получены из исходных временных рядов соответствующих показателей их отнесением к значению, зафиксированному в четвертом квартале 1994 года, и последующим логарифмированием. Например, $u_t^{(1)} = \ln \frac{(\mathtt{gt})_t}{(\mathtt{gt})_1}$ для значений $t = 1, ..., 32$.

В качестве эконометрической модели экономики, описанной в [1], предложена система *одновременных линейных уравнений*

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{y} = \mathtt{c}_{20} + \mathtt{c}_{21}\mathtt{i}_{(-4)} + \mathtt{c}_{22}\mathtt{e} - \mathtt{c}_{22}\mathtt{e}_{(-1)} + \mathtt{c}_{23}\mathtt{y}_{(-1)} + \mathtt{c}_{24}\mathtt{gd}_{(-2)} + \mathtt{c}_{25}\mathtt{dummy} + \epsilon_2,\\
&\mathtt{x} = \mathtt{c}_{10} + \mathtt{c}_{11}\mathtt{e} + \mathtt{c}_{12}\mathtt{tr} + \mathtt{c}_{13}\mathtt{o}_{(-1)} + \mathtt{c}_{14}\mathtt{y}_{(-1)} + \mathtt{c}_{15}\mathtt{x}_{(-1)} + \mathtt{c}_{16}\mathtt{dummy} + \epsilon_1,\\
&\mathtt{p} = \mathtt{c}_{30} + \mathtt{c}_{31}\mathtt{e}_{(-1)} + \mathtt{c}_{32}\mathtt{o}_{(-1)} + \mathtt{c}_{33}\mathtt{dummy} + \epsilon_3,\\
&\mathtt{n} = \mathtt{c}_{40} + \mathtt{c}_{41}\mathtt{y} + \mathtt{c}_{42}\mathtt{n}_{(-1)} + \mathtt{c}_{43}\mathtt{gt} + \mathtt{c}_{44}\mathtt{dummy} + \epsilon_4,\\
&\mathtt{m} = \mathtt{c}_{50} + \mathtt{c}_{51}\mathtt{p} + \mathtt{c}_{52}\mathtt{y} + \mathtt{c}_{53}\mathtt{m}_{(-1)} + \mathtt{c}_{54}\mathtt{x} + \mathtt{c}_{55}\mathtt{dummy} + \epsilon_5,\\
&\mathtt{co} = \mathtt{c}_{60} + \mathtt{c}_{61}\mathtt{p} + \mathtt{c}_{62}\mathtt{y} + \mathtt{c}_{63}\mathtt{m} + \mathtt{c}_{64}\mathtt{n} + \mathtt{c}_{65}\mathtt{co}_{(-1)} + \mathtt{c}_{66}\mathtt{dummy} + \epsilon_6,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $\mathtt{c}_{\mathtt{ij}}$ — параметры модели. Добавочная переменная $\mathtt{dummy} \in \{0, 1\}$ отражает состояние экономики до и после сентября 1998г., ϵ — авторегрессионный остаток.

Коэффициенты $\mathtt{c}_{10}, ..., \mathtt{c}_{66}$ модели найдены с помощью программы Econometric

Views. Результатом является идентифицированная модель, с помощью которой прогнозируется состояние объекта.

Очевидно, что экзогенные переменные $\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{p}, \mathtt{n}, \mathtt{m}, \mathtt{co}$ влияют на эндогенные переменные $\mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{ex}, \mathtt{gt}, \mathtt{gd}, \mathtt{tr}$ в большей или меньшей степени, что определяется коэффициентами $\mathtt{c}$. Не исключено и нулевое влияние некоторых переменных на другие.

Разделим экзогенные переменные на управляемые и переменные внешнего воздействия. Тогда модель прогноза на один квартал при заданном управлении $\mathtt{gt}, \mathtt{tr}$ и предполагаемом сценарном внешнем воздействии $\mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{ex}, \mathtt{gd}$ может быть представлена как

$$\begin{pmatrix} \mathtt{x} \\ \mathtt{y} \\ \mathtt{p} \\ \mathtt{n} \\ \mathtt{m} \\ \mathtt{co} \end{pmatrix} = \mathtt{C}_1 \begin{pmatrix} \mathtt{gt} \\ \mathtt{tr} \end{pmatrix} + \mathtt{C}_2 \begin{pmatrix} \mathtt{in} \\ \mathtt{oi} \\ \mathtt{ex} \\ \mathtt{gd} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2$ — матрицы коэффициентов, вычисляемые для заданного времени прогноза с помощью выражения (2). Например, модель, заданная уравнением (3) для $\mathtt{t} = 32$, представлена в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
\mathtt{x} &= -0.129 + 70.075\mathtt{ex} + 0.450\mathtt{oi} + 0.094\mathtt{tr} \\
\mathtt{y} &= 2.542 - 1.057\mathtt{ex} \\
\mathtt{p} &= 3.730 - 0.039\mathtt{oi} \\
\mathtt{n} &= 0.942 - 0.667\mathtt{ex} + 0.168\mathtt{gt} \\
\mathtt{m} &= 0.980 - 0.525\mathtt{ex} + 0.018\mathtt{oi} + 0.003\mathtt{tr} \\
\mathtt{co} &= 1.74 - 0.631\mathtt{ex} + 0.046\mathtt{gt} + 0.001\mathtt{oi} + 0.0008\mathtt{tr}
\end{aligned}$$

На основе идентифицированной системы одновременных линейных уравнений (2) построена *векторная авторегрессионная* модель, *рекурсивная форма* которой имеет вид

$$Y_t = \sum_{\tau=0}^{r} (A_\tau Y_{t-\tau} + B_\tau U_{t-\tau} + C_\tau Z_{t-\tau}) + M + \varepsilon_t. \tag{4}$$

Здесь вектор управляющих воздействий U^T и присоединенный к нему справа вектор внешних воздействий Z^T образуют транспонированный вектор экзогенных переменных, а матрица коэффициентов B и присоединенная к ней справа матрица C образуют матрицу коэффициентов, на которую вектор экзогенных переменных умножается слева.

В выражении (4) переменная t — дискретное время $t = 1, ..., t_0$, t_0 — последний наблюдаемый такт времени. Переменная τ обозначает глубину лагирования, причем $\tau = 1, ..., r < t_0$. Также переменная M есть регрессионное среднее и ε_t — регрессионный остаток, в общем различный в каждый момент времени. Так как состояние Y объекта управления описано m переменными, а управляющие U и неуправляемые Z внешние воздействия описаны соответственно q и k переменными, то матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}, C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и векторы $Y, M, \varepsilon \in \mathbb{R}^m, U \in \mathbb{R}^p, Z \in \mathbb{R}^k$.

Соответствие коэффициентов системы одновременных линейных уравнений (2), описанных в эконометрической модели и элементов матриц A, B и C модели векторной авторегрессии (3) показано в таблице 3.

В первом столбце таблицы показаны значения лаговой переменный τ, которые соответствуют матрицам коэффициентов напротив. Левая часть уравнения (4) — вектор Y показан в верхней строке таблицы. Он получается путем суммирования всех матриц, транспонированных и умноженных слева на соответствующие векторы, которые показаны в правом столбце таблицы, а также транспонированного вектора регрессионного среднего M (нижняя строка таблицы) и вектора авторегрессионного остатка ε_t (в таблице не показан). Из таблицы видно, что заполняемость ненулевыми коэффициентами невысока. В частности, все элементы матриц A_2, A_3, A_4, C_3 равны нулю, а матрицы C_2, C_4 имеют только по одному ненулевому элементу. В данной работе обсуждается только этот способ идентификации моделей (2) и (4), поэтому анализ заполняемости матриц A, B, C и нахождение оптимальной глубины лагирования τ останется за рамками статьи.

Представим выражение (4) в приведенной форме. Для этого перенесем вектор Y_t состояния объекта управления в левую часть и получим выражение

$$IY_t - A_0Y_t = B_0U_t + C_0Z_t + \sum_{\tau=1}^{r}(A_\tau Y_{t-\tau} + B_\tau U_{t-\tau} + C_\tau Z_{t-\tau}) + M + \varepsilon_t,$$

здесь I — единичная матрица. Матрица линейного оператора $A : Y \longrightarrow Y$ квадратная, диагональная вследствие предлагаемой эконометрической модели; следовательно, матрица $(I - A_0)$ не вырождена. Найдем обратную матрицу $(I - A_0)^{-1}$ и получим выражение

$$Y_t = (I - A_0)^{-1}\left(B_0U_t + C_0Z_t + \sum_{\tau=1}^{r}(A_\tau Y_{t-\tau} + B_\tau U_{t-\tau} + C_\tau Z_{t-\tau}) + M + \varepsilon_t\right). \tag{5}$$

Пусть известно состояние Y_t объекта управления и внешние воздействия U_t, Z_t в течение времени $t = 1, ..., t_0$. Чтобы спрогнозировать состояние объекта управления для момента времени $t = t_1$ необходимо подставить в выражение (5) значения векторов измерений экзогенных переменных U_t, Z_t в моменты времени $t = t_0, t_0 - 1..., t_0 - r$, вектора Y_t измерений эндогенных переменных в моменты времени $t = t_0 - 1..., t_0 - r$, а также значения матриц коэффициентов A_τ, B_τ, C_τ, где τ=$0, ..., r$.

$\tau=$		$Y^T=$	y	x	p	n	m	co	$Y=$
0	$A^T=$	$A_0{}^T=$	0	0	0	c41	c52	c62	y
			0	0	0	0	c54	0	x
			0	0	0	0	c51	c61	p
			0	0	0	0	0	c64	n
			0	0	0	0	0	c63	m
			0	0	0	0	0	0	co
1		$A_1{}^T=$	c23	c14	0	0	0	0	y
			0	c15	0	0	0	0	x
			0	0	0	0	0	0	p
			0	0	0	c42	0	0	n
			0	0	0	0	c53	0	m
			0	0	0	0	0	c65	co
2		$A_2{}^T=$				0			
3		$A_3{}^T=$				0			
4		$A_4{}^T=$				0			
	$B^T=$	$B_0{}^T=$	0	0	0	**c43**	0	0	gt
			0	**c12**	0	0	0	0	tr
0	$C^T=$	$C_0{}^T=$	0	0	0	0	0	0	i
			0	0	0	0	0	0	o
			c22	c11	0	0	0	0	e
			0	0	0	0	0	0	gd
			c25	c16	c33	c44	c55	c66	dummy
1		$C_1{}^T=$	0	0	0	0	0	0	i
			0	c13	c32	0	0	0	o
			c22	0	c31	0	0	0	e
			0	0	0	0	0	0	gd
2		$C_2{}^T=$				0			
			c24	0	0	0	0	0	gd
3		$C_3{}^T=$				0			
4		$C_4{}^T=$	c21	0	0	0	0	0	i
						0			
		$M=$	c20	c10	c30	c40	c50	c60	

Таблица 3: Соответствие коэффициентов модели (2) и элементов матриц A, B, C модели (4).

Результат прогноза состояния объекта управления — получение значений показателей состояния объекта и значения индикатора состояния объекта, которые достигаются через определенный промежуток времени. Выбирая ту или иную альтернативу управления или непосредственно указывая значения управляемых переменных, лицо принимающее решения получает информацию о возможных последствиях тех или иных шагов. Также объект управления принимает различные состояния при завышенном, нормальном и заниженном значении показателя курса доллара $\mathtt{ex}$.

Ниже показаны численные результаты прогноза на один квартал, $\mathtt{t} = \mathtt{33}$. Для прогноза необходимо установить значения управляемых переменных. Эти значения можно взять как из текущих данных, предполагая сохранение состояния объекта, так и назначить самостоятельно. В данном прогнозе управляемые переменные назначены следующим образом: $\mathtt{gt} = 346.00$, млрд. руб.; $\mathtt{tr} = 82.50$, млрд. руб. Предполагаемые неуправляемые переменные принимают значения $\mathtt{ex} = 31.80$, руб.; $\mathtt{oi} = 19.0$, долл. за баррель. Подставляя значения экзогенных переменных в уравнение (2) получаем прогнозируемое состояние объекта управления:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathtt{x} & = & 24.4706, & \text{млрд. руб.,} \\
\mathtt{y} & = & 2313.93, & \text{млрд. долл.,} \\
\mathtt{p} & = & 385.645, & \%, \\
\mathtt{n} & = & 806.298, & \text{млрд. руб.,} \\
\mathtt{m} & = & 11.7403, & \text{млрд. долл.,} \\
\mathtt{co} & = & 1160.86, & \text{млрд. руб.}
\end{array}
$$

На рис. 1 показаны результаты ретроспективного прогноза состояния экономики России. Черной линией обозначены исходные данные, а красной линией — восстановленные. Все значения показаны в унифицированной шкале. По осям абсцисс отложено время в номерах кварталов, см. табл. 2, по осям ординат отложены значения переменных, описанных в табл. 1.

3 Модель субъекта, цель управления

Модель субъекта определяет связь между списком альтернатив принимаемых решений и переменных, которые управляют субъектом. Для заданных элементов a из множества альтернатив $\mathcal{A} = \{a\}$ определяются значения управляемых переменных, $U = U(\mathcal{A})$. Принятие той или иной управляющей альтернативы определяет состояние субъекта управления и индикатора состояния объекта. И наоборот, задавая индикатор состояния или переменные состояния объекта мы определяем значения управляемых переменных и находим ближайшую соответствующую этим значениям альтернативу.

Согласно вышесказанному, цель управления объектом может быть задана двумя способами. Первый способ: лицо, принимающее решение указывает, какие показатели объекта должны быть получены в результате управления. Второй способ: лицо принимающее решение указывает, какое оптимальное значение индикатора состояния объекта должно быть достигнуто.

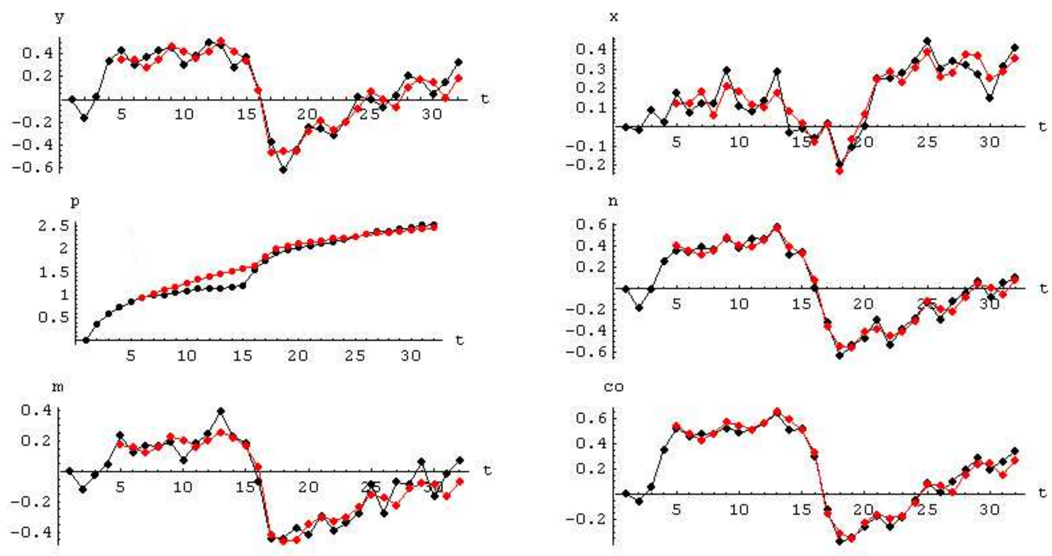

Рис. 1: Ретроспективный прогноз изменения состояния объекта с использованием модели (5)

На рис. 2 показано изменение интегрального индикатора состояния экономики России с конца 1994 года по 2002 год. Указывая оптимальные значения интегрального индикатора на этом графике, лицо, принимающее решение определяет оптимальное состояние субъекта управления или оптимальную область, которые необходимо достичь.

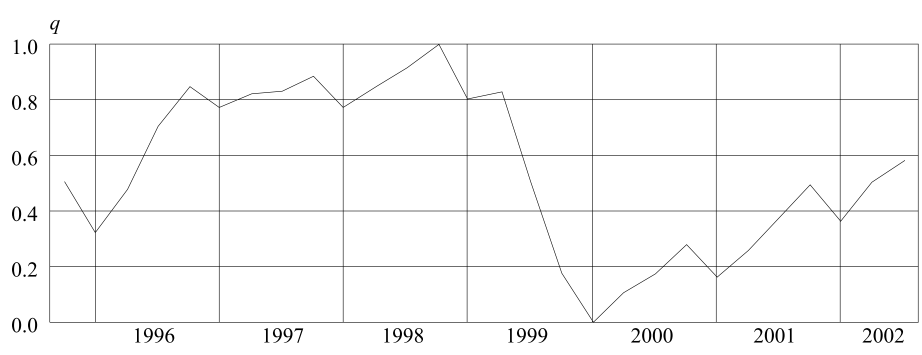

Рис. 2: Изменение интегрального индикатора состояния экономики России

4 Нахождение управления

При моделировании систем управления различают две задачи: *прямую и обратную.* Прямая задача заключается в нахождении состояния объекта управления при заданных управляющих воздействиях, см. (5). Обратная задача заключается в нахождении управляющих воздействий, которые требуются для достижения заданного состояния объекта при некоторых условиях, которые будут описаны ниже.

Прямая задача нахождения состояния Y_t объекта управления по экзогенным переменным U_t, Z_t, согласно эконометрической модели (2) решается посредством выражения (5). Для решения задачи управления, то есть, нахождения таких управляющих воздействий U, которые бы привели объект управления в заданное состояние $\bar{Y}$, рассмотрим зависимость состояния Y_t от управляющих воздействий $U_t, ..., U_{t-r}$. Для этого выберем из множества элементов $\{u_{t,\tau}^{(1)}, ..., u_{t,\tau}^{(k)}, t = t_0, \tau = 0, ..., r\}$ векторов $U_{t-\tau}$, такие элементы $u^{*(j)}$, составляющие вектор управления $U_t = [u^{*(1)}, ..., u^{*(k)}]^T$ что для $i = 1, ..., p$ и $j = 1, ..., k$ выполняется условие

$$b_{ij,\tau} \neq 0, \tau = \min(0, ..., r),$$

где $B_\tau = \{b_{ij,\tau}\}$. Другими словами выберем такие элементы вектора управляющих воздействий, которые для данного прогнозируемого состояния в момент времени t являются существенными, имеют ненулевые коэффициенты. При этом необходимо учитывать, что управляющее воздействие было последним по времени относительно состояния объекта управления. Например, в таблице 3 эти ненулевые коэффициенты `c12` и `c43` выделены. Также рассмотрим в качестве примера влияние управляемых переменных `gt` и `tr` на вектор Y состояния объекта управления. Для этого используем коэффициетны, описанные в табл. 3. На рис. 3 показано прямое и косвенное влияние управляющего воздействия, выраженное значениями коэффициентов `c`.

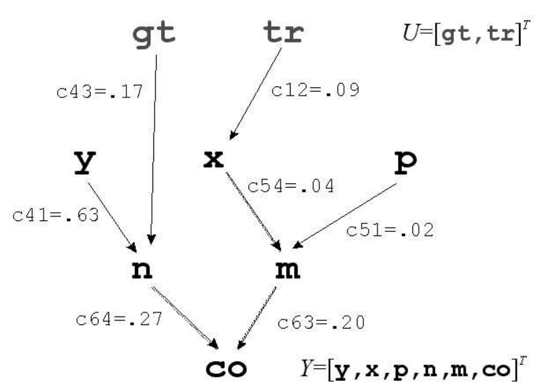

Рис. 3: Связи между управляемыми переменными и переменными состояния

Подставляя в выражение (5) значения векторов фазовых траекторий $(Y_{t_0-1}, ..., Y_{t_0-r})$, $(Z_{t_0-1}, ..., Z_{t_0-r})$ и $(U_{t_0-1}, ..., U_{t_0-r})$ за исключением элементов вектора U_t и упрощая это выражение, получаем

$$Y_t = G_r U_t + H_{t,r}, \tag{6}$$

где $G_r \in \mathbb{R}^{p\times k}$ — новая матрица коэффициентов для управляемых переменных U_t, значение которой вычисляется для заданного r и $H_{t,r} \in \mathbb{R}^m$ — вектор, вычисляемый для заданного момента времени по известным значениям фазовых траекторий.

Уравнение обратной задачи

$$U_t = G_r^+(Y_t - H_{t,r}) \tag{7}$$

получается путем псевдообращения оператора G. Так как $G \in \mathbb{R}^{m\times p}$, то псевдообратная матрица $G^+ \in \mathbb{R}^{p\times m}$ при выполнении условия $G^+G = I_p$. Отметим, что полученная модель является эконометрической по определению, см. с. 612 в [2], так как для решения обратной задачи необходимо с помощью измеряемых данных настраивать модель управления в каждый момент времени.

Для псевдообращения используется сингулярное разложение матрицы $G = W\Lambda V^T$. Так как W и V являются ортогональными матрицами, а Λ — диагональная матрица, то справедливо равенство $G^+ = V^T\Lambda^{-1}W$, причем $G^+G = V\Lambda^{-1}W^TW\Lambda V^T = I_k$, см. [6].

Задача управления, в общем, ставится следующим образом. Требуется подобрать такую последовательность управляющих воздействий $(U_{t_1}, ..., U_{t_n})$, при ограничениях на управление $U_t \in \Delta U_t$, которая бы при некотором заданном сценарии внешних воздействий обеспечивала бы через n шагов состояние $\bar{Y}_{t_n} \in \Delta U_{t_n}$. В рамках данной задачи определим две: задачу *наискорейшего приближения* к целевому состоянию и задачу *оптимального управления*.

Задача наискорейшего приближения не является оптимальной в том смысле, что для ее решения не назначается функция общей стоимости управления; требуется подобрать такие векторы управления $(U_{t_0}, ..., U_{t_n})$ при ограничениях $U_t \in \Delta U_t$, которые бы минимизировали расстояние между целевым вектором $\bar{Y}_{t_n}$ и вектором текущего состояния Y_t на каждом шаге.

Для этого на каждом шаге, начиная с t_0, отыскивается такое новое состояние $Y_{t+1} = \alpha\bar{Y}_{t_n} + (1-\alpha)Y_t$ объекта управления, что

$$\alpha = \arg\min_{U_{t+1}\in\Delta U_{t+1}} ||\bar{Y}_{t_n} - Y_{t+1}||^2,$$

где параметр $\alpha \in [0, 1]$. Данный алгоритм стремится достичь заданное состояние «любой ценой», независимо от характера заданных внешних воздействий $(Z_{t_1}, ..., Z_{t_n})$.

В задаче оптимального управления, как и в предыдущей, заданы сценарий внешних воздействий $(Z_{t_1}, ..., Z_{t_n})$, ограничения ΔU_t на управляющие воздействия U_t и целевой вектор $\bar{Y}_n$. Требуется найти такую последовательность векторов $(U_{t_1}, ..., U_{t_n})$, при ограничениях $U_t \in \Delta U_t$, которая приводила бы объект управления из начального состояния Y_{t_0} в целевое состояние $\bar{Y}_{t_n}$ за n шагов при минимальной стоимости управления $F(U_{t_1}, ..., U_{t_n}) \to \min$.

В основу процедуры оптимизации мы положим принцип оптимальности Р. Беллмана: любое оптимальное управление может быть образовано только оптимальными управляющими воздействиями на каждом шаге. Иначе, при любом состоянии системы перед очередным шагом необходимо выбирать управление так, чтобы стоимость управления на данном шаге и стоимость управления на всех последующих шагах была минимальной.

Для решения задачи используем теорему оптимальности Л. Миттена. Приведем ее в принятых нами обозначениях.
О п р е д е л е н и е. Функция F *строго разложима*, если F разделяема в виде

$$F(U_1, U_2) = f_1(U_1, f_2(U_2))$$

и если f_1 — монотонная функция по своему второму аргументу. Общий класс разложимых функций образован функциями вида

$$F(U_1, .., U_n) = f_1(U_1) \circ f_2(U_2) \circ ... \circ f_n(U_n).$$

Т е о р е м а. Пусть F — вещественная функция от U_1 и U_2. Если F разложима и $F(U_1, U_2) = f_1(U_1, f_2(U_2))$, то тогда

$$\min_{U_1, U_2} F(U_1, U_2) = \min_{U_1} \left(f_1 \left[U_1, \min_{U_2} \left(f_2(U_2) \right) \right] \right).$$

Для упрощения индексных обозначений будем считать, что начальное состояние объекта управления $t_0 = 0$, а конечное состояние — $t_n = n$ Объект управления в момент времени t описывается вектором Y_t. В моменты времени $t_1, ..., t_n$ к объекту применяются управляющие воздействия $U_1, ..., U_n$. Поведение объекта будем описывать *функциями перехода* $h_1, ..., h_n$, где для $t = 1, ..., n$ вектор $Y_t = h_t(U_t, Y_{t-1})$ есть результат применения к объекту управляющего воздействия U_t. В данном случае функция перехода h_t соответствует модели $Y_t = G_{t,r}U_t + H_{t,r}$, где $H_{t,r}$ зависит от Y_{t-1}. Каждому управляющему воздействию U_t соответствует стоимость $f_t = f(U_t, Y_{t-1})$.

Из состояния Y_0 в момент времени t_0 мы хотим привести объект управления в целевую область $\Delta\bar{Y}_n \ni \bar{Y}_n = g(U_1, ..., U_n)$ минимизируя при этом полную стоимость

$$F^* = \min_{U_1 \in \Delta U_1, ..., U_n \in \Delta U_n} F(U_1, ..., U_n).$$

Для множества управлений $\{U_1, ..., U_n\}$ конечное состояние системы $g(U_1, ..., U_n)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} &Y_1 = h_1(U_1, Y_0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &Y_n = h_n(U_n, Y_{n-1}), \\ &Y_n = g(U_1, ..., U_n). \end{aligned}$$

Полная стоимость управления равна $F(U_1, ..., U_n)$ и определяется соотношением

$$F(U_1, ..., U_n) = f_1(U_1, Y_0) + f_2(U_2, Y_1) + ... + f_n(U_n, Y_{n-1}).$$

В нашем случае функция полной стоимости F является аддитивной и очевидным образом строго разложима, что дает возможность применить к задаче алгоритм *динамического программирования* [5].

Алгоритм нахождения оптимального управления заключается в следующем. Под действием управления U_t объект принимает состояние $Y_t = h_t(U_t, Y_{t-1}) = G_r U_t + H_{t,r}$, причем стоимость управления на каждом шаге определяется как $f(U_t, Y_{t-1})$.

Рекуррентное уравнение динамического программирования выражает стоимость $F_t(Y)$ условного оптимального управления начиная с t-го шага до конца через уже известную функцию $F_{t+1}(Y)$:

$$F_t(Y) = \min_{U_t \in \Delta U_t} [f(U_t, Y_{t-1}) + F_{t+1}(h_t(U_t, Y_{t-1}))].$$

Этой стоимости соответствует условное оптимальное управление U_t на шаге t.

Далее производится условная оптимизация последнего шага n для множества состояний Y_{n-1} таких, что $Y_n = h(U_n, Y_{n-1})$ при $U_n \in \Delta U_n$ и вычисляется условная стоимость

$$F_n(Y_t) = \min_{U_n \in \Delta U_n} f(U_n, Y_{n-1})$$

и находится оптимальное управление U_n.

После этого производится условная оптимизация для всех t, $n-1 > t > 0$. Так как начальное состояние Y_0 известно, то искомая величина $F^* = F(U_1, ..., U_n) = F_1(Y_0)$.

Из вышеописанной процедуры оптимизации следует, что целевое множество множество ΔY_0 достижимо, если найдутся такие векторы $Y_1, ..., Y_n$ состояния объекта, что для всех $t = 1, ..., n$ существует управление $U_t = G^+_{t,r}(Y_t - H_{t,r})$, лежащее в ΔU_t.

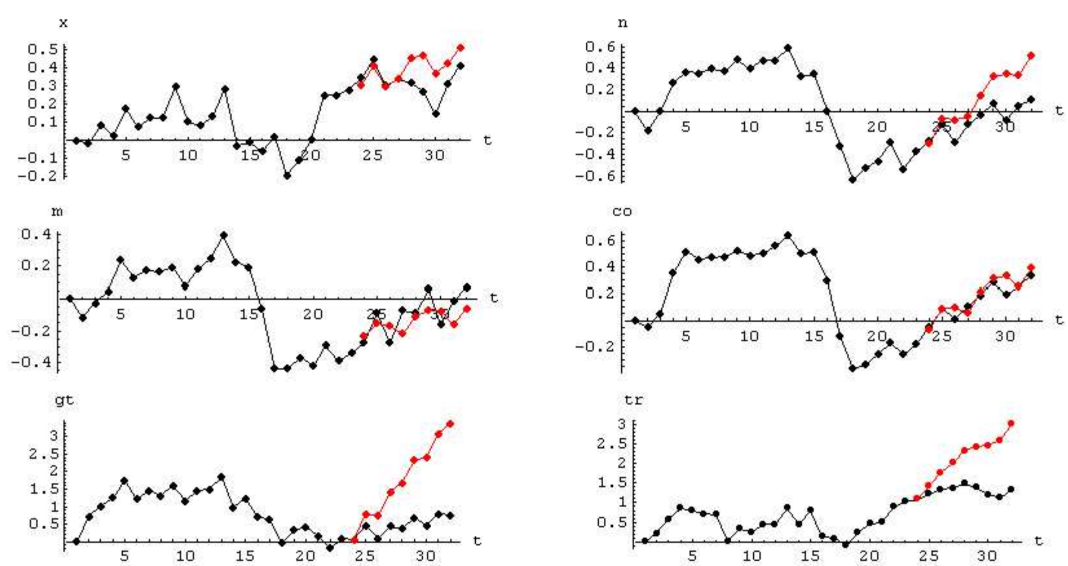

Рис. 4: Прогноз изменения состояния объекта при максимальных затратах управления

Приведем пример нахождения оптимального управления в рамках рассматриваемой эконометрической модели. На рисунках 4 и 5 показаны результаты ретроспективного оптимального управления на восемь кварталов. Черной линией обозначены исходные данные, а красной — полученные в результате оптимизации и моделирования. Функция стоимости управления назначалась как линейная комбинация разности последующих во времени векторов управляющего воздействия, то есть учитывались последовательные изменения переменных gt и tr. На верхних четырех графиках каждого рисунка показаны значения переменных состояния $[\mathtt{x}, \mathtt{n}, \mathtt{m}, \mathtt{co}]^T$, отложенные по осям ординат. На нижних двух графиках каждого рисунка показаны значения переменных управления. Значения всех переменных показаны в унифицированной шкале. По осям абсцисс всех графиков отложено время в кварталах.

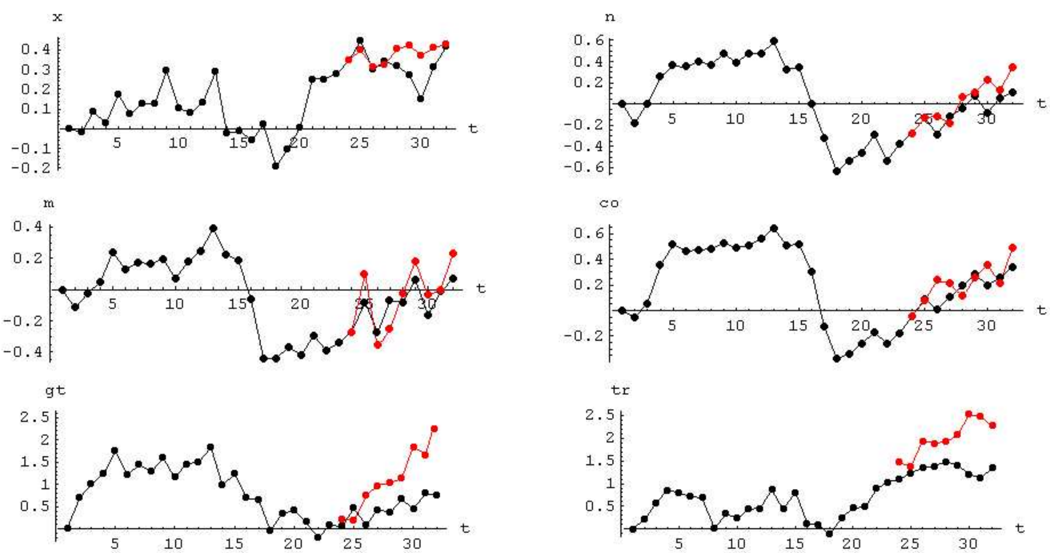

Рис. 5: Прогноз изменения состояния объекта при оптимальном управлении

На рис. 5 показано изменение индикатора q состояния экономики. Черная линия показывает фактическое значения индикатора за исследуемый период времени. Красная линия показывает значение индикатора при оптимальном управлении.

Заключение

Разработка системы поддержки принятия решений состоит из двух фаз. Первая фаза — наполнение системы. В эту фазу входят определение моделей субъекта и объекта, целей управления, сбор данных, идентификация. Вторая фаза — эксплуатация системы. В эту фазу входят принятие альтернатив управленческих решений, прогноз состояния объекта управления, нахождение оптимальных значений управляемых переменных.

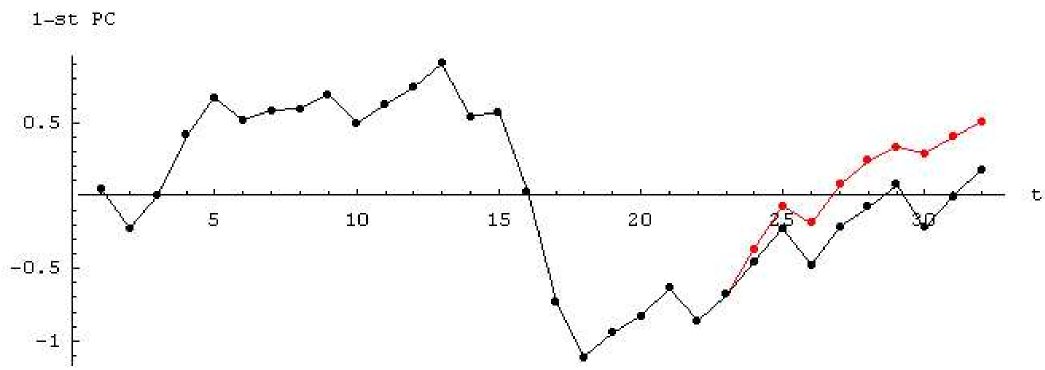

Рис. 6: Изменение интегрального индикатора состояния экономики России

В данной статье на сквозном тестовом примере показаны определение элементов системы. Также показаны две основные функции системы поддержки принятия решений: прогноз состояния объекта управления и нахождения оптимальных управляющих воздействий.

Показано, что существует множество различных траекторий $\{Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}\}$, которые позволяют достичь целевое состояние объекта управления $\bar{Y}_{t_n}$. Стоимость управления при выборе траектории можно оптимизировать. Не всегда максимальная стоимость управления приводит к наилучшему результату.

Список литературы

[1] Aivazian S. A., Borisova S. V., Lakalin E. A., Makarov V. L. Econometric Modelling of the Russian Economy. — Acta Aplicantae Matematicae, vol. 75(2003), №1.

[2] С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян, Прикладная статистика и основы эконометрики. — М.: ЮНИТИ, 1998.

[3] http://www.osp.ru/os/1997/03/73.htm

[4] Макаров В. Л. Вычислительная модель российской экономики (RUSEC). — Препринт WP/99/069, М.: ЦЭМИ РАН, 1999.

[5] Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1990. — С. 340-378.

[6] Стрижов В. В. Согласование экспертных оценок для биосистем в экстремальных условиях. Научное издание. /Под ред. Шакина В. В. — М.: ВЦ РАН 2002.