Прогноз и управление в авторегрессионных моделях

В.В. Стрижов, В.В. Шакин

(Москва)

Векторные авторегрессионные модели и модели на основе одновременных уравнений являются эффективными инструментами макроэкономического анализа. Ранее, см. [1–3], была построена модель краткосрочного прогноза основных макроэкономических показателей российской экономики с использованием системы линейных одновременных уравнений. В данной работе для прогноза используется векторно-авторегрессионная модель, составленная таким образом, что значения прогнозной функции зависят не только от экзогенных, сценарных воздействий, но и, в частности, от целевого управления. Новая модель позволяет найти оптимальные управляющие воздействия и спрогнозировать состояние объекта управления при оптимальном управлении.

Прямая задача нахождения состояния $Y = Y_t$ объекта управления по экзогенным переменным $X = X_t$, согласно векторной авторегрессионной модели, имеет вид $Y_t = \sum_{\tau=0}^{r}(A_\tau Y_{\tau-t} + B_\tau X_{\tau-t}) + M + \varepsilon_t$, где Y_t – состояние объекта управления в момент времени t, описываемое набором эндогенных переменных; X_t – управляемые и неуправляемые внешние воздействия на объект управления в момент времени t, описываемые набором экзогенных переменных; t – дискретное время $t = 1,...,t_0$ и $\tau = 0,...,r < t_0$ – временной лаг. В уравнение включены вектор M – регрессионное среднее и вектор ε_t – регрессионный остаток, в общем различный в каждый момент времени. Пусть состояние объекта управления описано p действительными переменными, а внешние воздействия описаны q действительными переменными. Тогда треугольная матрица $A \in R^{p\times p}$, матрица $B \in R^{p\times q}$ и векторы $Y, M, \varepsilon \in R^p, X \in R^q$.
Для прогноза состояния объекта при различных управляющих воздействиях, экзогенные переменные, элементы вектора X, разделяются на управляемые переменные U и переменные внешнего воздействия Z. Соответственно матрица регрессионных коэффициентов B разделяется на присоединенные матрицы $C \mid F$.

Полученная приведенная форма уравнения векторной авторегресии

$$Y_t = (I - A_0)^{-1}\left(C_0 U_t + F_0 Z_t + \sum_{\tau=1}^{r} (A_\tau Y_{\tau-t} + C_\tau U_{\tau-t} + F_\tau Z_{\tau-t}) + M + \varepsilon_t \right)$$

для получения краткосрочного прогноза состояния по заданному управлению редуцируется до выражения $Y_t = G_r U_t + H_{t,r}$.

Для решения задачи оптимального прогноза редуцированное выражение обращается $U_t = G_r^+ (Y_t - H_{t,r})$, где псевдообратная матрица G_r^+ получена с помощью сингулярного разложения.

Задача нахождения оптимального управления ставится следующим образом. Для заданной предыстории поведения объекта управления и заданного сценария внешних воздействий $Z_{t_0},...,Z_{t_n}$ требуется найти такую последовательность управляющих воздействий $U_{t_0},...,U_{t_n}$, при ограничениях $U_t \in \Delta U_t$, которая приводила бы объект управления из начального состояния Y_{t_0} в достижимое целевое состояние $\overline{Y}_{t_n}$ за заданное число шагов при минимальной стоимости управления $C^*(U_{t_0},...,U_{t_n})$.

В основу процедуры оптимизации управления положен принцип оптимальности Р. Беллмана: любое оптимальное управление может быть образовано только оптимальными управляющими воздействиями на каждом шаге. Иначе, при любом состоянии системы перед очередным шагом необходимо выбирать управление так, чтобы стоимость управления на данном шаге и стоимость управления на всех последующих шагах была минимальной.

Под действием управления U_t объект принимает состояние $Y_t = h_t(U_t, Y_{t-1}) = G_r U_t + H_{t,r}$, причем стоимость управления на каждом шаге определяется как $f(U_t, Y_{t-1})$.

Рекуррентное уравнение динамического программирования выражает стоимость $C_t(Y)$ условного оптимального управления, начиная с t-го шага до первого шага t_0 через уже известную функцию $C_{t+1}(Y)$:

$$C_t(Y) = \min_{U_t \in \Delta U_t} \left[f(U_t, Y_{t-1}) + C_{t+1}(h_t(U_t, Y_{t-1})) \right].$$

Этой стоимости соответствует условное оптимальное управление U_t на шаге t.

Таким образом, сначала производится условная оптимизация последнего шага t_n для множества состояний Y_{t_n-1} таких, что $Y_{t_n} = h(U_{t_n}, Y_{t_n-1})$ при

$U_{t_n} \in \Delta U_{t_n}$, вычисляется условная стоимость $C_{t_n}(Y) = \min_{U_{t_n} \in \Delta U_{t_n}} f(U_{t_n}, Y_{t_n - 1})$ и находится оптимальное управление U_{t_n}. Далее производится условная оптимизации для всех шагов $t : t_n > t > t_0$. Так как начальное состояние объекта управления Y_{t_0} известно, то искомая величина $C^* = C^*(U_{t_0},...,U_{t_n}) = C_1(Y_{t_0})$.

Были проведены численные эксперименты с использованием ежеквартальных измерений двенадцати основных показателей состояния российской экономики за 1994–2002 годы. Получено множество различных траекторий $Y_{t_0},...,Y_{t_n}$, позволяющих достичь целевого состояния $\overline{Y}_{t_n}$ объекта управления. Найдены оптимальные траектории для заданных функций стоимости управления. Выяснилось, что не всегда максимальная стоимость управления приводит к наискорейшему достижению целевого состояния.

Работа поддержана грантом РФФИ.

Литература

1. Aivazian S. A., Borisova S. V., Lakalin E. A., Makarov V. L. Econometric Modelling of the Russian Economy. – Acta Aplicantae Matematicae, vol. 75(2003), №1.
2. http://www.osp.ru/os/1997/03/73.htm
3. Макаров В. Л. Вычислительная модель российской экономики (RUSEC). – Препринт WP/99/069, М.: ЦЭМИ РАН, 1999 г.