ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

В.В. Стрижов

Разработано программное обеспечение для приближенного описания траектории автономной динамической системы в N-мерном фазовом пространстве параметров. Описание системы отыскивается в виде последовательности областей объемлющего конечномерного вещественного пространства, содержащих в некотором приближении траекторию системы.

Один из предлагаемых алгоритмов описания системы состоит в том, чтобы вначале аппроксимировать часть исходной фазовой траектории линейным сплайном, а затем найти размерность и границы области фазового пространства, например, с помощью сингулярного разложения соответствующей подматрицы данных.

Пусть траектория системы известна на равномерной временной решетке $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, ..., T=(M-1)\tau$, причем координаты системы известны с точностью до аддитивного гауссова шума. Обозначим N измеряемых фазовых параметров через $x_1, x_2, ... x_N$, так что исходные данные образуют матрицу данных вида $X = \left(x_{i,j}\right)_{i,j=1}^{N,M}$. В столбцах матрицы находятся значения данного параметра в течение промежутка времени T. В строках матрицы находятся все измеряемые параметры в данный момент времени $t \in T$.

Пусть исходные сигналы содержат в себе белый гауссов шум, среднее значение которого равно нулю, а дисперсия постоянна и известно, что она равна σ^2. Аппроксимируем векторы $\boldsymbol{x}_j$ линейными сплайнами. Узлы сплайнов находятся при помощи критерия Фишера для дисперсионного отношения между сигналом и шумом [1]. Для нахождения узлов сплайна выберем подмножество длиной m_0. Предполагая, что элементы подмножества изменяются линейно, можно утверждать, что на любом участке этого подмножества дисперсия неизменна и равна σ^2.

$$\sigma_{m_0}^2 = \frac{1}{m_0 - 1}\sum_{i=1}^{m_0} (\bar{x} - x_i)^2$$

где $\bar{x}$ – среднее арифметическое выбранного подмножества, $\boldsymbol{x}_i$ – i-й элемент подмножества ($i = 1..m_0$). Сравним дисперсию двух подмножеств длиной m_0 и m_0+1 с началом одной точке.

$$F = \frac{\sigma_{m_0}^2}{\sigma_{m_0+1}^2}$$

Если значение статистики F будет значимо больше единицы, то гипотеза о линейности нарушается. Следовательно, в данной точке с номером m_0+1 можно поставить новый узел линейного сплайна. После интерполяции каждому вектору $\boldsymbol{x}_j$ можно поставить в соответствие множество, состоящее из L элементов (x_{jl}, m_{jl}), m может принимать любые целочисленные значения от 1 до M, $l=1..L$. Для того, чтобы новые значения векторов можно было хранить в матрице, где в каждой строке хранится информация о состоянии системы в определенный момент времени, выбираем все значения m_j и экстраполируем сплайны так, чтобы все вектор-столбцы $\boldsymbol{x}_j$ имели общие точки m_j. Обозначим полученную матрицу $A = \left(x_{i,j}\right)_{i,j=1}^{N,L}$. Матрица A имеет N столбцов и L строк ($L<M$).

Чтобы определить размерность матрицы, найдем сингулярное разложение A. Любую матрицу A размерности LxN, в которой число строк L больше числа столбцов N можно представить в виде произведения ортогональной матрицы U размерности LxN, диагональной матрицы W (размерности NxN) и транспонированной ортогональной матрицы V (размерности NxN). $A=UWV^T$. Здесь диагональная матрица W имеет на диагонали сингулярные числа $w_1 \ldots w_r \ldots w_n$, причем $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_r > w_{r+1} \geq \ldots \geq w_n \geq 0$. То есть элементы начиная с номера r могут быть равными нулю или близки к нему. Число r можно назвать статистически значимым рангом матрицы. В данной задаче оно принимается равным искомой размерности фазового пространства наблюдаемой системы.

Развитые методы иллюстрируются на тестовых и реальных данных.

Литература

1. Шакин В.В. Вычислительная электрокардиография. М.: Наука, 1981.
2. Опознавание и описание линий. М.: Наука, 1972.
3. Тезисы докладов ММРО-6, с.113-115.