Zavodskaya Laboratoriya 2006 (7), P.59–64

The specification on expert estimations using measured data

Strijov, V.
Computing Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
e-mail: strijov@ccas.ru

Abstract

The problem of stable integral indicators for an object set is considered. The expert estimates of the objects are used. The indicators are computed as a linear combination of the object features and corrected with the expert estimates. The well known algorithms are involved to compare the proposed method.

УДК 519.584

Уточнение экспертных оценок с помощью измеряемых данных[1]

В. В. Стрижов, Вычислительный центр РАН

Аннотация

Описан способ построения интегральных индикаторов качества сложных объектов с использованием экспертных оценок. Интегральные индикаторы вычисляются как линейная комбинация показателей объектов. Используются экспертные оценки качества объектов и важности показателей, которые корректируются в процессе вычисления. Для сравнения с предлагаемым методом приведены известные методы построения интегрального индикатора «без учителя» и «с учителем».

Ключевые слова: интегральные индикаторы, экспертные оценки, согласование, экспертно-статистический метод, сингулярное разложение

1 Введение

Содержательное основание метода составляют работы в области снижения размерности признакового пространства и экспертно-статистический метод. Термин «экспертно-статистический метод» впервые был введен С.А. Айвазяном [1]: «Пытаясь оценить в целом эффективность деятельности отдельного специалиста, подразделения или предприятия, проранжировать страны по некоторому интегральному качеству $<\ldots>$ мы решаем одну и ту же задачу: отправляясь в своем анализе от набора частных показателей, каждый из которых может быть измерен и характеризует какую-нибудь одну

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 04-01-00401.

частную сторону понятия “эффективность”, мы их как бы взвешиваем (т.е. внутренне оцениваем удельный вес их влияния на общее, агрегированное, понятие эффективности) и выходим на некоторый скалярный агрегированный показатель эффективности». Таким образом, было предложено построить интегральный индикатор множества объектов в виде линейной комбинации показателей объектов.С другой стороны, В.В. Шакиным [2] был предложен метод объективизации работы жюри. Основная идея этого метода заключалась в двойственности экспертной оценки, когда эксперты могли оценивать как веса измеряемых показателей, так и ценность объектов. В настоящей работе на основе этого метода был развит метод согласования оценок, полученных непосредственно от экспертов и вычисленных оценок.

Предлагаемый подход имеет целью согласовать экспертные оценки и заключается в поиске компромиссного решения. Согласно этому подходу, экспертам предоставляется возможность разрешить противоречие между интегральными индикаторами объектов, весами показателей и измеряемыми данными.

Для построения интегральных индикаторов необходимы как экспертные оценки качества объектов, так и объективные, измеряемые показатели — описания объектов. Роль экспертной оценки в данной работе велика. Эксперт устанавливает критерий, по которому оценивается объект, определяет множество сопоставимых по данному критерию объектов и выставляет оценки каждому объекту. Проблемам получения адекватных экспертных оценок посвящена работа А.И. Орлова [3].

2 Постановка задачи

Задано множество $\Upsilon = \{\upsilon_1, ..., \upsilon_m\}$ объектов и множество показателей $\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$. Произвольный объект υ_i описывается с помощью вектора-строки $\mathbf{a}_{i\cdot} = \langle a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\rangle$: $\mathbf{a}_{i\cdot} \in \mathbb{R}^n$. Множество измерений представляется в виде матрицы исходных данных, обозначаемой $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ в пространстве действительных чисел: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Элемент

a_{ij} — значение j-го показателя ψ_j для i-го объекта υ_i.

Интегральным индикатором объекта $\upsilon_i \in \Upsilon$ с номером i называется скаляр q_i, поставленный в соответствие набору $\mathbf{a}_{i\cdot}$ описаний объекта. При рассмотрении множества объектов Υ вектор $\mathbf{q} = \langle q_1, ..., q_m\rangle^T : \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ считался интегральным индикатором множества объектов, описанных матрицей $A = \{\mathbf{a}_{i\cdot}\}_{i=1}^m : A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Объект υ_i, имеющий максимальный по значению интегральный индикатор (наибольшую экспертную оценку, если она рассматривается в качестве интегрального индикатора) $q_i = \max\{q_1, ..., q_m\}$ считается *наилучшим*. Показатель ψ_j, имеющий максимальный по значению вес (наибольшую экспертную оценку, если она рассматривается в качестве веса показателя) $w_j = \max\{w_1, ..., w_n\}$ считается *наиважнейшим* при нахождении интегрального индикатора. Таким образом выполнено предложение

$$\begin{aligned} a_{\xi\zeta} &= \max\{a_{i\zeta}\}_{i=1}^m \Rightarrow q_\xi = \max\{q_1, ..., q_m\}, \\ a_{\eta\vartheta} &= \min\{a_{i\vartheta}\}_{i=1}^m \Rightarrow q_\eta = \min\{q_1, ..., q_m\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Векторы $\mathbf{a}_{\cdot j} = \langle a_{1j}, ..., a_{mj}\rangle^T : \mathbf{a}_{\cdot j} \in A$ нормированы так, что выполняется равенство

$$a_{ij} = 1 - \frac{|a_{ij} - a_j^{opt}|}{\max([a_j^{opt} - \min(\mathbf{a}_{\cdot j})], [\max(\mathbf{a}_{\cdot j}) - a_j^{opt}])}, \quad i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n, \tag{2}$$

где оптимальное значение $\mathrm{opt}(\mathbf{a}_{\cdot j}) : \min(\mathbf{a}_{\cdot j}) < \mathrm{opt}(\mathbf{a}_{\cdot j}) < \max(\mathbf{a}_{\cdot j})$ задано.

В работе [4] предложен экспертно-статистический метод нахождения интегральных индикаторов «с учителем», использующий экспертные оценки качества объектов. Он заключается в нахождении таких весов $\mathbf{w}$, при которых достигался бы минимум функционала невязки экспертных интегральных индикаторов $\mathbf{q}_0$ и вычисленных индикаторов: $\mathbf{w} = \arg\min\limits_{\mathbf{w}} ||\mathbf{q}_0 - A\mathbf{w}||_2^2$. Полученный индикатор $\mathbf{q}_{\text{э-с}} = A\mathbf{w}$.

Рассмотрим задачу, в которой эксперты способны выставить адекватные интегральные индикаторы $\mathbf{q}_0$ и веса показателей $\mathbf{w}_0$. Тогда каждый объект можно оценить двумя путями: непосредственно через экспертную оценку и через взвешенную сумму значений показателей объекта, где веса определяются экспертными оценками показателей. В общем случае эти оценки различны.

Пусть задан вектор $\mathbf{q}_0 = \langle q_{01}, ..., q_{0m} \rangle^T$, $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$ экспертных оценок интегральных индикаторов m объектов и вектор $\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, ..., w_{0n} \rangle^T$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$ экспертных оценок весов n показателей. Задана матрица A.

Согласно принятой модели, по исходным экспертным оценкам весов показателей $\mathbf{w}_0$ можно вычислить значения вектора интегрального индикатора $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, также, по исходным экспертным оценкам значения вектора интегрального индикатора $\mathbf{q}_0$ можно вычислить веса показателей $\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$, где A — линейный оператор, представляемый при помощи данной матрицы, A^+ — оператор, псевдообратный [5] оператору A. В общем случае вектор экспертной оценки $\mathbf{q}_0$ объектов и вектор взвешенной суммы значений показателей объектов $\mathbf{q}_1$ различны: $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{q}_1$, также $\mathbf{w}_0 \neq \mathbf{w}_1$.

Согласованными значениями интегрального индикатора и весов показателей называются такие значения $\hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{w}}$, при которых выполняется условие

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}} & = & A\hat{\mathbf{w}}, \\ \hat{\mathbf{w}} & = & A^+\hat{\mathbf{q}}. \end{cases} \tag{3}$$

Требуется найти оператор согласования Φ, переводящий тройку $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ в согласованную тройку $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$.

3 α-согласование

Введем следующую процедуру согласования. Пусть A — матрица линейного оператора, отображающего пространство весов показателей $W \ni \mathbf{w}_0$ в пространство интегральных индикаторов объектов $Q \ni \mathbf{q}_0$, $A : W \longrightarrow Q$, и пусть для A существует псевдообратный оператор A^+, отображающий пространство интегральных индикаторов в пространство весов показателей $A^+ : Q \longrightarrow W$. То есть, $A^+A = I_n$, $AA^+ = I_m$, $A^+AA^+ = A^+$, $AA^+A = A$.

Сингулярное разложение [6] невырожденной матрицы A имеет вид $A = U\Lambda V^T$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_R)$ — диагональная матрица, $R = \min(m, n)$ и $U^TU = I_m, VV^T = I_n$ —

ортогональные матрицы. Матрица $A^+ = V\Lambda^{-1}U^T$ является для матрицы A псевдообратной. Действительно, $A^+A = V\Lambda^{-1}U^TU\Lambda V^T = I_n$, $AA^+ = U\Lambda V^TV\Lambda^{-1}U^T = I_m$.

Найдем отображение вектора $\mathbf{w}_0$ из пространства W в пространство Q: $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$ и отображение вектора $\mathbf{q}_0$ из пространства Q в пространство W : $\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{w}_0$. Мы получили два отрезка — $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0] \subset Q$ и $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0] \subset W$. Их Евклидова длина $\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1\|$ и $\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|$ характеризует несогласованность экспертных оценок. Найдем согласованные оценки на этих отрезках. Для этого введем параметры α и β.

Теорема 1. *Существуют такие α, β, при которых значения векторов $\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{q}_\beta$*

$$
\begin{array}{rcl}
\{\mathbf{w}_\alpha : \mathbf{w}_\alpha & = & (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha\mathbf{w}_1\} \in [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1], \\
\{\mathbf{q}_\beta : \mathbf{q}_\beta & = & \beta\mathbf{q}_0 + (1-\beta)\mathbf{q}_1\} \in [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1],
\end{array} \tag{4}
$$

где $\alpha, \beta \in [0, 1]$, удовлетворяют требованиям согласования, то есть, $A\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{q}_\beta$, причем $\alpha = 1 - \beta$.

Доказательство. Так как $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$, и линейный оператор $A : [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1] \longrightarrow [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$, то равенство $(1-\alpha)A\mathbf{w}_0 + \alpha A\mathbf{w}_1 = (1-\beta)\mathbf{q}_0 + \beta\mathbf{q}_1$ справедливо при $\alpha = 1 - \beta$. □

Перепишем выражение (4) с одним параметром:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{q}_\alpha & = & \alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0, \\
\mathbf{w}_\alpha & = & (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0.
\end{array} \tag{5}
$$

Таким образом, посредством параметра α становится возможно уточнять экспертные оценки $\mathbf{w}_0, \mathbf{q}_0$, получая новые оценки $\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha$.

Оценим невязку при выбранном параметре α. Евклидово расстояние между исходными векторами $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ и полученными векторами $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ в пространстве интегральных индикаторов и в пространстве весов соответственно равны $\varepsilon^2 = \|\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_0\|^2$и $\delta^2 = \|\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_0\|^2$. В качестве критерия выбора параметра α возьмем условие минимального расстояния между начальными и согласованными экспертными оценками в обоих пространствах Q и W. Учитывая, что размерности этих пространств соответственно равны m и n, нормируем квадраты расстояний и находим такие согласованные значения векторов $\mathbf{q}_\alpha$ и $\mathbf{w}_\alpha$, что они удовлетворяют условию

$$\frac{\varepsilon^2}{m-1} = \frac{\delta^2}{n-1}. \tag{6}$$

На практике эксперты сами могут выбирать значение параметра α в зависимости от предпочтений важности оценок объектов или оценок показателей. При изменении параметра доверия экспертов α к экспертным оценкам объектов и показателей или при изменении самих экспертных оценок вышеописанную процедуру можно повторить и передать на обсуждение экспертов вновь полученные результаты.

4 γ^2-согласование

Определим согласованное решение как решение удовлетворяющее условию (3), при котором расстояние от согласованных векторов $\mathbf{q}_\gamma$ и $\mathbf{w}_\gamma$ таких, что $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$ до соответственно векторов экспертных оценок $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{w}_0$ будет минимальным. Пусть

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2, \\ \delta^2 &= \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Решение задачи нахождения минимального расстояния от согласованных векторов до векторов экспертных оценок имеет вид

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg\min_{\mathbf{w}\in W} (\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2), \tag{8}$$

где весовой множитель $\gamma^2 \in (0, \infty)$ — определяет степень компромисса между оценкой объектов и показателей. При малых значениях γ^2 в большей степени учитывается экспертная оценка объектов, а при больших значениях γ^2 в большей степени учитывается экспертная оценка показателей. Выпуклый функционал $(\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2)$ достигает единственного глобального минимума на множестве $\mathbf{w}_\gamma \in W$ в точке

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1}(A^T\mathbf{q}_0 + \gamma^2\mathbf{w}_0).$$

Так же, как и предыдущем методе, параметр γ^2 для получения согласованных векторов $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$ и $\mathbf{w}_\gamma$ выбирается исходя из условия $\frac{\varepsilon^2}{m-1} = \frac{\delta^2}{n-1}$ или назначается экспертами.

5 Использование процедур согласования экспертных оценок

Предложненные процедуры были использованы для построения интегральных индикаторов нескольких технических и социальных систем, в частности, были построены Индикатор влияния электростанций региона на окружающцю среду, Индекс развития человеческого потенциала в регионах России, Интегральный индикатор качества управления заповедниками России. Приведем последний индикатор в качестве примера.

На сегодняшний день в России работают сто государственных природных заповедников. В каждом заповеднике в течение года собираются данные о состоянии заповедника и о воздействиях на него. Один из основных разделов ежегодного отчета о работе заповедника — отчет о работе службы охраны заповедника. Он содержит 17 показателей. Экспертами были выбраны 23 объекта.

Для проведения процедур согласования были собраны следующие данные: экспертные оценки $\mathbf{q}_0$ качества работы службы охраны, экспертные оценки $\mathbf{w}_0$ важности показателей, таблица данных A заповедники/показатели. Процедуры согласования используют в качестве исходных данных оценки объектов и показателей одного эксперта. Данные и экспертные оценки были обработаны, чтобы удовлетворять условиям (1) и (2). Начальные значения параметров доверия α и γ^2 были назначены, исходя из условия (6).

Выбор параметра доверия к экспертным оценкам интегрального индикатора или к экспертным оценкам весов показателей проиллюстрируем следующим образом. На рис. 1 показано изменение векторов $\mathbf{w}_\alpha$ и $\mathbf{q}_\alpha$ для различных значений параметра α. По оси абсцисс отложены номера компонент векторов, а по оси ординат отложены значения векторов. Значения параметра α на графиках сверху вниз соответственно равны $\{0, 0.36, 1\}$. Каждая горизонтальная пара графиков показывает состояние согласованной пары векторов $\mathbf{q}_\alpha$ и $\mathbf{w}_\alpha$ при данном значении α. По оси абсцисс отложены номера компонент векторов, по оси ординат отложены значения данных компонент векторов.

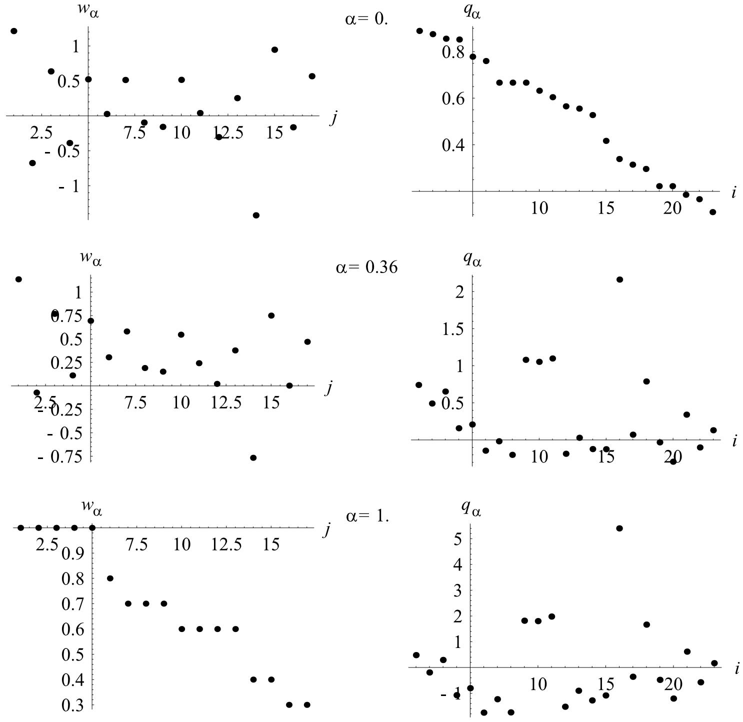

Рис. 1: Изменение весов показателей и интегрального индикатора при различных значениях параметра α

При минимальном значении параметра α, близки исходная оценка индикатора $\mathbf{q_0}$ и согласованная оценка $\mathbf{q}_\alpha$, см. верхний правый график. При максимальном значении параметра α, близки исходная оценка весов показателей $\mathbf{w_0}$ и согласованная оценка $\mathbf{w}_\alpha$, см. нижний левый график. При значении $\alpha = 0.36$ расстояния обоих согласованных векторов до соответствующих им исходных векторов становятся одинаковы: $\frac{\varepsilon^2}{m} = \frac{\delta^2}{n}$. Изменение расстояний ε, δ при выборе параметров α, γ^2 показаны на рис. 2. Здесь по оси абсцисс отложены значения α, γ^2, а по оси ординат значения ε, δ. При увеличении значений параметров расстояние ε между векторами $\mathbf{q_0}$ и $\mathbf{q}_\alpha$ увеличивается, а расстояние δ между векторами $\mathbf{w_0}$ и $\mathbf{w}_\alpha$ уменьшается.

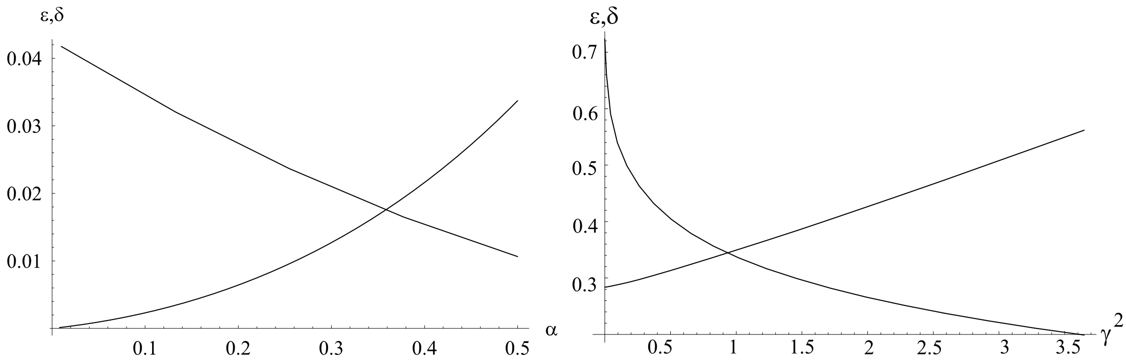

Рис. 2: Зависимость расстояний ε и δ от параметров α и γ^2

Для оценки работ процедур согласования воспользуемся суммарным расстоянием от векторов экспертных оценок до согласованных векторов $\frac{\varepsilon^2}{m} + \frac{\delta^2}{n}$. Для процедуры α-согласования оно равно 0.67, для процедуры γ^2-согласования — 0.62. Расстояние, полученное с помощью процедуры γ^2-согласования меньше, чем расстояние, полученное с помощью процедуры α-согласования, так как во втором случае согласованные векторы $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ принадлежат соответственно отрезкам $[\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$ и $[\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1]$, а в первом случае согласованные векторы $\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma$ лежат в окрестности соответственно векторов $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{w}_0$.

6 Заключение

Существует множество способов получения интегральных индикаторов с использованием измеряемых данных. Но после выбора алгоритма и получения результатов встает вопрос: как показать, что полученные индексы верны? Для ответа на этот вопрос аналитики приглашают экспертов. Эксперты высказывают свое мнение и тогда встает другой вопрос: как обосновать адекватность экспертных оценок? Предлагаемый метод позволяет оценить непротиворечивость экспертных оценок и получить обоснованные интегральные индикаторы. Обе процедуры — α-согласования и γ^2-согласования дают в численных экспериментах близкие результаты. Поэтому первая процедура может быть рекомендована в том случае, когда параметр согласования назначают сами эксперты. В том случае, когда требуется найти минимальное суммарное расстояние, предпочтательна процедура γ^2-согласования.

Список литературы

[1] Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998. — С. 363.

[2] Шакин В. В. К объективизации работы жюри. Линейная модель связи ценности объектов и индексов. /в кн. под ред. Кулагина А. С. Методика и техника статистической обработки материалов социологических исследований идеологической работы. — М.: Академия общественных наук при ЦК КПСС, 1972. — С. 251-263.

[3] Орлов А. И. Современный этап развития теории экспертных оценок. /Заводская лаборатория, 1996, №1.

[4] Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. /Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989. — С. 334,421-424.

[5] Голуб Дж., Ван-Лоун Ч. Матричные вычисления — М.: Мир, 1999. — С. 223.

[6] Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М.: Мир, 1969. — С. 15-18.