РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

В. В. СТРИЖОВ

СОГЛАСОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ БИОСИСТЕМ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА, 2002

УДК 519.584

Ответственный редактор
канд. физ.-матем. наук В. В. Шакин

Рассмотрена задача согласования экспертных оценок при построении интегральных индикаторов. Описан метод объективизации экспертных оценок, позволяющий получить непротиворечивые оценки объектов и показателей. Описана библиотека процедур для построения согласованных интегральных индикаторов. Приведены примеры построения интегральных индикаторов при анализе эффективности работы государственных заповедников.

Работа поддержана грантом РФФИ 00-01-00197 "Критерии качества жизни и устойчивого развития для социально-экономических систем в экстремальных условиях".

Рецензенты: А. К. Благовидов,
К. В. Воронцов

Научное издание

Введение

На сегодняшний день в России работают сто государственных природных заповедников. Заповедник — самая строгая форма охраны природных территорий. Особенность управления заповедником состоит в том, что непосредственное управление объектом недопустимо, и поэтому в качестве объекта управления рассматривается не природная территория, а источник негативного воздействия на нее. Субъект управления не может прямо влиять на состояние охраняемой природной территории, и главная его цель — обеспечение защиты природной территории от антропогенных воздействий.

Схема анализа охраны особо охраняемой природной территории (ООПТ) от антропогенных воздействий строится следующим образом. Во-первых, составляется систематизированный перечень воздействий и собирается информация об источниках воздействий. Производится оценка влияния каждого вида воздействий на состояние природной территории. Во-вторых, каждому воздействию ставятся в соответствие оптимальные, в некотором смысле ответные меры по защите от воздействия. И в-третьих, по отчетам заповедников оценивается эффективность их работы как совпадение принятой руководством меры с оптимальной мерой.

В каждом заповеднике в течение года собираются данные о состоянии заповедника и о воздействиях на него. Эти данные отражены в ежегодном отчете о работе заповедника, летописи природы, научных статьях и отчетах. Для оценки состояния заповедника с целью принятия управленческого решения требуется найти интегральный индикатор — число, которое наиболее полно описывает эффективность управления заповедником. Этот интегральный индикатор должен быть основан как на мнениях экспертов, так и на реальных данных о заповеднике.

Интегральный индикатор — свертка данных, наиболее информативно описывающих объект [1]. Для вычисления значений интегрального индикатора ранее были предложены методы как с участием, так и без участия экспертов [1,2]. Были применены три подхода построения интегрального индикатора. Согласно первому подходу был получен интегральный индикатор "без учителя", как проекция вектора измерений каждого заповедника на первую главную компоненту матрицы данных. Полученный результат, по мнению экспертов, оказался неудовлетворительным. Согласно второму подходу интегральный индикатор строился "с учителем", как взвешенная сумма измерений показателей каждого объекта. Как показала практика, веса назначались неверно, что также приводило к результатам, спорным с точки зрения экспертов.

Предлагаемый третий подход имеет целью согласовать экспертные оценки и заключается в поиске компромиссного решения. Согласно этому подходу экспертам предоставляется возможность разрешить противоречие между интегральными индикаторами эффективности управления, весами измеряемых показателей и данными ежегодных отчетов.

В данной работе большое внимание уделяется экспертным суждениям и оценкам. Выработку согласованных экспертных суждений делает группа экспертов. Условно эксперты могут делиться на две группы: эксперты-аналитики и эксперты-синтетики. На практике в первую группу чаще попадают ученые и специалисты по заповедникам, а во вторую — работники заповедников. Эксперты принимают участие в построении следующих элементов:

1. Принятие управленческого решения: эксперты-синтетики.

2. Участие в выработке согласованной оценки состояния ООПТ и воздействий: эксперты-синтетики.

3. Оценка весомости показателей состояния ООПТ, оценка влияния воздействий на состояние заповедника: эксперты-аналитики.

4. Построение и идентификация модели порождения данных: эксперты-аналитики.

5. Оценка эффективности управления заповедником: эксперты-аналитики.

Методика работы экспертных групп более подробно описана в [3].

В каждом заповеднике в течение года собираются данные о состоянии заповедника и о воздействиях на него. Эти данные отражены в ежегодном отчете о работе заповедника, летописи природы, научных статьях и отчетах. Оценка состояния заповедников заключается в следующем. Эксперты оценивали веса базовых показателей и интегральные индикаторы объектов. Для этого экспертам был предложен специально подготовленный набор анкет [4,5]. В результате оценки были получены множество весов и множество интегральных индикаторов.

С помощью процедуры построения интегрального индикатора “без учителя” был получен интегральный индикатор. Далее заповедники были разбиты на кластеры. Экспертам были показаны результаты построения интегрального индикатора и результаты процедур кластеризации, после чего экспертные оценки были уточнены. Затем была проведена процедура согласования экспертных оценок. Результаты этой процедуры — согласованные интегральный индикатор и веса показателей были опубликованы для дальнейшего обсуждения экспертами. При необходимости эксперты корректируют свои мнения. Тогда процедура согласования оценок повторяется.

Для построения интегральных индикаторов необходимы как экспертные оценки состояния дел в заповеднике, так и объективные, или измеряемые показатели работы заповедников. Роль экспертов в данной методике очень велика. Эксперты выставляют оценки каждому заповеднику, оценивают всю систему заповедников в целом и определяют саму методику оценки заповедников. В связи с тем, что результаты зависят от мнений экспертов, в работе принимали участие квалифицированные эксперты — специалисты по заповедному делу.

Предполагается, что эксперты имеют собственное мнение, не навязанное общественным мнением и не построенное только на основании данных, публикуемых в отчетах. Это мнение базируется на личном опыте и на знаниях, приобретенных в процессе работы, связанной с заповедниками и с заповедным делом. Свое мнение эксперты отражают в специально приготовленных анкетах и в комментариях к этим анкетам. Все анкеты составляются таким образом, чтобы, во-первых, дать эксперту наибольшую свободу в высказываниях, во-вторых, учесть мнение каждого эксперта при подготовке общего результата.

1. Модель порождения данных

Задано множество $\Upsilon = \{\upsilon_1, ..., \upsilon_m\}$ объектов и множество показателей $\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$. Объект υ_i описывается с помощью вектора-строки $\mathbf{a}_{i\cdot} = \langle a_{i1}, ..., a_{in}\rangle : \mathbf{a}_{i\cdot} \in \mathbb{R}^n$. Множество описаний объектов представляется в виде матрицы исходных данных $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$.

Определение 1. *Объект υ_i, имеющий максимальный по значению интегральный индикатор (наибольшую экспертную оценку, если она рассматривается в качестве интегрального индикатора) $q_i = \max\{q_1, ..., q_m\}$, считается наилучшим. Объект υ_i, имеющий минимальный по значению интегральный индикатор $q_i = \min\{q_1, ..., q_m\}$, считается наихудшим.*

Определение 2. *Показатель ψ_j, имеющий максимальный по значению вес (наибольшую экспертную оценку, если она рассматривается в качестве веса показателя) $w_j = \max\{w_1, ..., w_n\}$, считается наиважнейшим при нахождении интегрального индикатора.*

Выполнены следующие предложения. Максимальное значение элемента $a_{\xi\zeta}$ измеряемого показателя ψ_ζ с номером ζ означает, что ξ-й объект υ_ξ является наилучшим по данному показателю. Также минимальное значение элемента $a_{\xi\zeta}$ показателя ψ_ζ означает, что объект υ_ξ является наихудшим по данному показателю,

$$\begin{aligned} a_{\xi\zeta} = \max\{a_{i\zeta}\}, i = 1, ..., m \Rightarrow q_\xi = \max\{q_1, ..., q_m\}, \\ a_{\xi\zeta} = \min\{a_{i\zeta}\}, i = 1, ..., m \Rightarrow q_\xi = \min\{q_1, ..., q_m\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Векторы $\mathbf{a}_{\cdot j} = \langle a_{1j}, ..., a_{mj}\rangle : \mathbf{a}_{\cdot j} \in A$ нормированы так, что выполняется равенство [1]

$$\bar{a}_{ij} = 1 - \frac{|a_{ij} - a_j^{opt}|}{\max([a_j^{opt} - \min(\mathbf{a}_{\cdot j})], [\max(\mathbf{a}_{\cdot j}) - a_j^{opt}])}, \qquad (2)$$

где $i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$ и оптимальное значение $\mathrm{opt}(\mathbf{a}_{\cdot j})$: $\min(\mathbf{a}_{\cdot j}) < \mathrm{opt}(\mathbf{a}_{\cdot j}) < \max(\mathbf{a}_{\cdot j})$ задано.

2. Нахождение интегрального индикатора "без учителя"

Для нахождения интегральных индикаторов "без учителя" использовались метод главных компонент, метод сингулярных компонент и расслоение Парето. Использовалась также взвешенная сумма $\mathbf{q} = \bar{A}\mathbf{w}_0$, где веса $\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, ..., w_{0n}\rangle^T : \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$ назначались экспертами.

Определение 3. *Интегральным индикатором объекта $\upsilon_i \in \Upsilon$ с номером i будем называть скаляр $q_i \in \mathbb{R}^1$, поставленный в соответствие набору $\mathbf{a}_{i\cdot}$ описаний объекта.*

При рассмотрении множества Υ будем считать вектор $\mathbf{q} = \langle q_1, ..., q_m\rangle^T : \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ интегральным индикатором множества объектов, описанных матрицей $A = \{\mathbf{a}_{i\cdot}\}_{i=1}^m : A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Основная идея методов нахождения интегрального индикатора "без учителя" заключается в том, что наилучшим считается i-й объект с максимальными значениями показателей (обозначим ее "*tbtb*" — the bigger the better). Объект с наибольшим интегральным индикатором при выполнении условия (2) имеет значения показателей $\bar{\mathbf{a}}_{i\cdot} = \{1, 1, ..., 1\}$. Сильная сторона данной идеи в ее простоте и универсальности. Слабая сторона идеи заключается в том, что она предполагает определенную линейную зависимость между столбцами матрицы A. Например, оценивая объекты, которым соответствует матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{2,m}$ при коэффициенте корреляции между ее столбцами $r_{1,2} = -1$, эксперт, который ориентируется на гипотезу "*tbtb*", скажет, что данные противоречивы.

2.1. Вычисление расстояния

При нахождении интегрального индикатора с помощью данной процедуры вычисляется расстояние от вектора-столбца $\bar{\mathbf{a}}_{i\cdot}$, описывающего каждый объект, либо до наихудшего объекта с показателями, принимающими значение $\bar{\mathbf{a}}_{i\cdot} = \{0, 0, ..., 0\}$, $q_i = (\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}^{k})^{\frac{1}{k}}$; либо до наилучшего объекта с показателями, принимающими значение $\bar{\mathbf{a}}_{i\cdot} = \{1, 1, ..., 1\}$, при соблюдении условия (2), $q_i = (\sum_{j=1}^{n}(1 - \bar{a}_{ij})^{k})^{\frac{1}{k}}$. При значении $k = 1, 2$ расстояния вычислены соответственно в манхэттенской и евклидовой метрике. При $k \geq 3$ полученное расстояние называется расстоянием Минковского. В частности, для нахождения интегральных индикаторов использовалась взвешенная сумма $\mathbf{q} = \bar{A}\mathbf{w}_0$, где веса $\mathbf{w}_0$ назначались экспертами.

2.2. Метод главных компонент

Для нахождения первой главной компоненты нормированной и затем центрированной матрицы $\tilde{A}$ необходимо найти такие коэффициенты $C = \{c_{ij}\}_{i,j}^{n,n}$, что линейные комбинации векторов

$$\mathbf{z}_{\cdot i} = \tilde{A}\mathbf{c}_{\cdot i}, \quad i = 1, ..., n,$$

обладали бы наибольшей дисперсией, т. е.

$$\max\left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{z}_{\cdot 1}+\mathrm{D}\mathbf{z}_{\cdot 2}+...+\mathrm{D}\mathbf{z}_{\cdot n}}{\mathrm{D}\tilde{\mathbf{a}}_{\cdot 1}+\mathrm{D}\tilde{\mathbf{a}}_{\cdot 2}+...+\mathrm{D}\tilde{\mathbf{a}}_{\cdot n}}\right)$$

при ограничениях нормировки $\sum_{i=1}^{m} c_{ij}^2 = 1, j = 1, ..., n$ и $\sum_{i=1}^{m} c_{ij}c_{ik} = 0, j, k = 1, ..., n, j \neq k$. Здесь D — знак операции вычисления дисперсии соответствующей случайной величины

$$\mathrm{D}\mathbf{a}_{\cdot j}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}-\breve{a}_{\cdot j})^2,$$

где $\breve{a}_{\cdot j}$ — среднее арифметическое значение вектора-столбца.

Процедура нахождения главных компонент [6] заключается в следующем:

1. Задается ковариационная матрица $\Sigma = \{\sigma_{jk}\}_{j,k=1}^{n,n}$, элементы которой находятся по формуле

$$\sigma_{jk}=\frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^{n}(a_{ij}-\breve{a}_{\cdot j})(a_{ik}-\breve{a}_{\cdot k}). \tag{3}$$

2. Определяется наибольшее собственное значение λ_1 матрицы Σ как наибольший по величине корень характеристического уравнения $|\Sigma-\lambda I_n| = 0$. Алгоритм нахождения собственных значений матриц описан в [7].

3. Решая уравнение $(\Sigma-\lambda_1 I)\mathbf{c}_{\cdot 1} = 0$, находим компоненты собственного вектора $\mathbf{c}_{\cdot 1} = (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n1})^T$ матрицы Σ.

4. Для каждого объекта подсчитываем значение первой главной компоненты

$$q_i = c_{11}(a_{i1}-\breve{a}_{\cdot 1})+c_{21}(a_{i2}-\breve{a}_{\cdot 2})+\ldots+c_{n1}(a_{in}-\breve{a}_{\cdot n}). \tag{4}$$

В результате приведенной выше процедуры мы получаем интегральный индикатор $\mathbf{q} = \{q_i\}_{i=1}^m$.

Для оценки качества построения интегрального индикатора использовалось значение величины

$$\rho = \frac{\lambda_1}{\sigma_{11} + \sigma_{22} + ... + \sigma_{nn}}$$

отношения первого собственного значения λ_1 к сумме значений диагональных элементов ковариационной матрицы (3), см. [1].

2.3. Сингулярное разложение

Рассмотрим приближенное линейное описание матрицы $A = \{a_{ij}\}$ вида

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{r} u_{kj}\lambda_k v_{jk} + c_{ij}, \tag{5}$$

где $i = 1, ..., m$ и $j = 1, ..., n$. Приближенное линейное описание (5) более подробно см. в [8]. Значения $u_{kj}, \lambda_k, v_{jk}$ для данного значения k найдены из условия минимума выражения

$$\varepsilon_n^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \tag{6}$$

при ограничениях нормировки

$$\sum_{j=1}^{n} u_{kj}^2 = \sum_{i=1}^{m} v_{ik}^2 = 1 \tag{7}$$

и упорядоченности $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r \geq ... \geq 0$.

Выражения (5), (6), (7) запишем в матричных обозначениях

$$A = U\Lambda V^T + C,$$
$$\varepsilon^2 = \mathrm{tr}(CC^T) = \|C\|^2,$$
$$U^T U = VV^T = 1,$$

где $U = \{u_{kj}\}, \Lambda = \{\lambda_k\}, V = \{v_{ik}\}$. Если значение r достаточно велико, то C=(0). Так будет заведомо при $r \geq \min\{m, n\}$. Минимальное значение r, при котором выполнимо равенство $A = U\Lambda V^T$, равно рангу матрицы A. В работе [9] рассмотрена и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой вещественной $(n \times n)$-матрицы A существуют две вещественные ортогональные $(n \times n)$-матрицы U и V, такие что $U^T AV$ — диагональная матрица Λ. Более того, можно выбрать U и V так, чтобы диагональные элементы Λ имели вид*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0,$$

где r — ранг матрицы A. В частности, если A не вырождена, то

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n > 0.$$

Здесь цитируемая теорема приведена в принятых ранее обозначениях, которые не изменяют ее сущности.

В работе [8] утверждается, что задача минимизации выражения (6) при условии (7) эквивалентна задаче приближенного представления функции двух переменных $\zeta(x, y)$ суммой попарных произведений $\sum_i \alpha_i(x)\beta_i(y)$ функций $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(y)$ одной переменной. В работе [10] предлагается квадратичный алгоритм решения этой задачи.

Найдем последовательно векторы $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ и сингулярные числа λ_k для $k = 1, ..., r$. В качестве этих векторов берутся нормированные значения векторов $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_k$ соответственно: $\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{a}_k}{\|\mathbf{a}_k\|}$, $\mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{b}_k}{\|\mathbf{b}k\|}$. Векторы $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_k$ находятся как пределы последовательностей векторов $\{\mathbf{a}_{k_i}\}$ и $\{\mathbf{b}_{k_i}\}$, соответственно $\mathbf{a}_k = \lim(\mathbf{a}_{k_i})$ и $\mathbf{b}_k = \lim(\mathbf{b}_{k_i})$. Сингулярное число λ_k находится как произведение норм векторов: $\lambda_k = \|\mathbf{a}_k\| \cdot \|\mathbf{b}_k\|$.

Процедура нахождения векторов $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ начинается с выбора наибольшей по норме строки $\mathbf{b}_{1_1}$ матрицы A. Для $k = 1$ формулы нахождения векторов $\mathbf{a}_{1_i}, \mathbf{b}_{1_i}$ имеют вид:

$$\mathbf{a}_{1_i} = \frac{A\mathbf{b}_{1_i}^T}{\mathbf{b}_{1_i}\mathbf{b}_{1_i}^T}, \qquad \mathbf{b}_{1_{i+1}} = \frac{\mathbf{a}_{1_i}^T A}{\mathbf{a}_{1_i}^T \mathbf{a}_{1_i}}, \qquad i = 1, 2, ... \quad .$$

Для вычисления векторов $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ при $k = 2, ..., r$ выполняется приведенная выше формула с той разницей, что матрица A заменяется на скорректированную на k-м шаге матрицу $A_{k+1} = A_k - \mathbf{u}_k \lambda_k \mathbf{v}_k$.

В данной работе мы воспользовались следующим свойством сингулярного разложения. Так как матрицы U и V ортогональные, т. е.

$$U^T U = V V^T = I, \tag{8}$$

где I — единичная матрица размерности $r \times r$, то из (8) следует, что

$$\begin{aligned} AA^T = U\Lambda V V^T \Lambda U^T = U\Lambda^2 U^T, \\ A^T A = V^T \Lambda U^T U \Lambda V = V^T \Lambda^2 V. \end{aligned} \tag{9}$$

Умножая оба выражения справа соответственно на U и V^T, получаем

$$\begin{aligned} AA^T U = U\Lambda^2, \\ A^T A V^T = V^T \Lambda^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Из выражения (10) следует, что столбцы матрицы U являются собственными векторами матрицы AA^T, а квадраты сингулярных чисел $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ ее собственными значениями (см. [11]). Также, строки матрицы V являются собственными векторами матрицы $A^T A$, а квадраты сингулярных чисел являются ее собственными значениями.

Процедура нахождения интегрального индикатора по сингулярному разложению [9] заключается в следующем. Находим сингулярное разложение матрицы исходных данных. Согласно теореме 1 любую матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, в которой по условию (2) число строк m больше числа столбцов n, можно представить в виде произведения ортогональной матрицы U размерности $m \times n$, диагональной матрицы Λ размерности $n \times n$ и транспонированной ортогональной матрицы V размерности $n \times n$.

$$A = U\Lambda V^T. \tag{11}$$

Матрица Λ содержит на своей диагонали убывающие по значению сингулярные числа. Выполняется условие

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > ... > \lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0),$$

где индекс r элемента λ_r есть фактическая размерность собственного пространства матрицы A. Находим проекцию всех векторов A на вектор матрицы U, соответствующий наибольшему сингулярному числу λ_1:

$$\mathbf{q} = U\mathrm{diag}(\lambda_1, 0, \cdots, 0). \tag{12}$$

Как и в предыдущем методе, вектор $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ является интегральным индикатором исследуемых объектов.

2.4. Расслоение Парето

Интегральный индикатор, полученный методом расслоения Парето [12,13] инвариантен к любым преобразованиям исходных данных, сохраняющих порядок значений объектов внутри данного показателя. Это дает возможность опустить предварительную обработку данных [14].

Имеем исходные данные, представленные матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$, и $\mathbf{a}_{i\cdot}, \mathbf{a}_{\xi\cdot} \in \mathbb{R}^n$ — векторы данной матрицы, описывающие i-й и ξ-й объекты. Вектор $\mathbf{a}_{\xi\cdot} = \langle a_{\xi j}\rangle_{j=1}^{n}$ называется недоминируемым, если не найдется ни одного вектора $\mathbf{a}_{i\cdot}$, такого что

$$a_{ij} > a_{\xi j}, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n. \tag{13}$$

Для некоторого вектора $\mathbf{a}_{\xi\cdot} \in W$ пространство $W = \mathbb{R}^n$, в котором он находится, является объединением двух областей $W = W_1 \cup W_2$. Недоминируемые векторы $\mathbf{a}_{\xi\cdot} \in W_1$, остальные доминируемые векторы $\mathbf{a}_{i\cdot} \in W_2$. При совпадении векторов $\mathbf{a}_{\xi\cdot} = \mathbf{a}_{i\cdot}$ считается, что оба вектора находятся при соблюдении условия (13) в недоминируемой области $\mathbf{a}_{\xi\cdot}, \mathbf{a}_{i\cdot} \in W_1$. Произвольный вектор $\mathbf{a}_{i\cdot}$ сам себя не доминирует.

Для выполнения процедуры расслоения Парето требуется найти все недоминируемые векторы для каждого слоя. Определим исходные множества S и T как $S = \{\mathbf{a}_{i\cdot}\}_{i=1}^{m}$ и $T = \emptyset$. Для ζ-го слоя множество

$$S_\zeta = \{\mathbf{a}_{\xi\cdot} : a_{\xi j} > a_{ij}, \mathbf{a}_{\xi\cdot} = \mathbf{a}_{i\cdot}, \xi \in \{1...n\}\}_{i,j=1}^{m,n}.$$

Все найденные векторы $\{\mathbf{a}_{\xi\cdot}\} \in S_\zeta$ находятся в одном слое. Добавляем множество S_ζ в множество T. Исключаем множество векторов S_ζ из дальнейшего рассмотрения и повторяем процедуру для множества векторов $S \setminus T$ до тех пор, пока в этом множестве не останется ни одного вектора. В результате расслоения получаем множество T, состоящее из l слоев S_ζ:

$$T = \bigcup_{\zeta=1}^{l} S_\zeta. \qquad (14)$$

Для получения интегрального индикатора поставим в соответствие каждому вектору $\mathbf{a}_{\xi\cdot}$, $\xi = 1, ..., m$, индекс ζ множества S_ζ, которому принадлежит вектор $\mathbf{a}_{\xi\cdot}$. Полученное множество $\Xi = \{\zeta_\xi\}_{\xi=1}^m$ приведем к виду, удовлетворяющему начальным условиям $\mathbf{q} = \{\max(\Xi) - \zeta_\xi\}_{\xi=1}^m$. Очевидно, что данном случае $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^m$.

Существенным недостатком расслоения Парето является то, что при большой размерности пространства показателей или при отрицательной корреляционной зависимости показателей значение l становится равным единице. Этот недостаток может быть обойден, если в качестве набора входных показателей взять только те показатели, вклад которых при нахождении первой главной компоненты матрицы A наиболее значителен.

Для множества базовых показателей объектов $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^n$ найдем такое подмножество $\Psi^* = \{\psi_{j_1}, ..., \psi_{j_l}\}$, $j_k \in \{1, ..., n\}$, $k = 1, ..., l$, для которого число ν^* различных элементов множества $\mathbf{q}_p = \{q_1, ..., q_m\}$, полученного посредством процедуры расслоения Парето, будет наиболее близко к ν. Значение ν определяется экспертом на основании сведений о числе ожидаемых кластеров, на которые разбивается множество объектов Υ, или на основании результатов процедуры кластеризации.

Подмножество базовых показателей Ψ^* строится следующим образом. Пусть $\mathbf{q}_m$ — интегральный индикатор, полученный методом главных компонент и пусть $\mathbf{a}_{\cdot j}$ — вектор-столбец матрицы A, соответствующий показателю ψ_j. Поставим в соответствие каждому показателю ψ_j коэффициент корреляции $r_j = r(\mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{\cdot j})$ и получим множество $\mathbf{r} = \langle r_1, ..., r_j \rangle$. Из множества Ψ последовательно выберем подмножества $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi^{(3)}, ...$, которые состоят из одного, двух, трех и т. д., элементов — показателей, имеющих наибольший коэффициент r_j корреляции с первой главной компонентой $\mathbf{q}_m$.

Для каждого такого подмножества $\Psi^{(i)} =$ найдем интегральный индикатор $\mathbf{q}_p^{(i)}$ методом расслоения Парето. Искомым множеством Ψ^* будем считать такое множество $\Psi^{(i)}$, которому соответствует расслоение Парето с числом слоев, иначе, числом ν^* различных элементов множества $\mathbf{q}_p^*$, наиболее близким к заданному числу ν.

Вклад показателей $\{\psi_{j_1}, ..., \psi_{j_l}\}$ подмножества базовых показателей при нахождении первой главной компоненты вычисляется как отношение

$$\rho^* = \frac{r_1^* + ... + r_l^*}{r_1 + ... r_n},$$

где $r_1^*, ..., r_l^*$ — множество коэффициентов корреляции между столбцами $\mathbf{a}_{\cdot j}$ матрицы A, соответствующими построенному множеству Ψ^*, и первой главной компонентой $\mathbf{q}_m$; и $r_1, ..., r_n$ — множество коэффициентов корреляции между всеми столбцами $\mathbf{a}_{\cdot j}$ матрицы A и первой главной компонентой $\mathbf{q}_m$. Значение ρ^* характеризует качество интегрального индикатора, полученного процедурой расслоения Парето с использованием подмножества Ψ^* базовых показателей.

3. Согласование экспертных оценок

Каждому объекту v_i поставлена в соответствие экспертная оценка q_{0i}, также каждому показателю ψ_j поставлена в соответствие экспертная оценка w_{0j}, т. е. заданы векторы $\mathbf{q}_0 = \langle q_{01}, ..., q_{0m}\rangle^T : \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{w}_0 = \langle w_{01}, ..., w_{0n}\rangle^T : \mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Тройку $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ удобно представить с помощью таблицы, в которой каждый элемент вектора $\mathbf{q}_0$ поставлен в соответствие строке, а каждый элемент вектора $\mathbf{w}_0$ поставлен в соответствие столбцу матрицы A.

$$\begin{array}{c|c} & \mathbf{w}_0^T \\ \hline \mathbf{q}_0 & A \end{array}$$

В общем случае вектор экспертной оценки $\mathbf{q}_0$ объектов и вектор взвешенной суммы значений показателей объектов $A\mathbf{w}_0$ различны, $\mathbf{q}_0 \neq A\mathbf{w}_0$, также $\mathbf{w}_0 \neq A^+\mathbf{q}_0$, где A — линейный оператор, представляемый при помощи данной матрицы, и A^+ — оператор, псевдообратный оператору A.

Определение 4. *Согласованными значениями интегрального индикатора и весов показателей будем называть такие значения $\hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{w}}$, при которых выполняется условие*

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}} = A\hat{\mathbf{w}}, \\ \hat{\mathbf{w}} = A^+\hat{\mathbf{q}}. \end{cases} \tag{15}$$

Определение 5. *Оператором согласования экспертных оценок Φ будем называть оператор, переводящий тройку $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$ в тройку $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$, где векторы $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}$ удовлетворяют условию (15):*

$$\Phi : (\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A) \longrightarrow (\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A).$$

Рассмотрим семейство операторов согласования $\Phi = \Phi(\Omega)$, определяемое процедурой согласования Ω.

3.1. α-согласование

Определим оператор согласования следующим образом. Пусть A — матрица линейного оператора, отображающего пространство весов показателей $W \ni \mathbf{w}_0$ в пространство интегральных индикаторов объектов $Q \ni \mathbf{q}_0$:

$$A : W \longrightarrow Q,$$

и пусть для A существует псевдообратный оператор A^+, отображающий пространство интегральных индикаторов в пространство весов показателей $A^+ : Q \longrightarrow W$, т. е. $A^+A = I_n$, $AA^+ = I_m$, $A^+AA^+ = A^+$, $AA^+A = A$ [15].

Существует сингулярное разложение матрицы A вида $A = U\Lambda V^T$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_R)$, $R = \min(m, n)$, и

$$U^T U = I_m, V V^T = I_n. \tag{16}$$

Теорема 2. *Матрица $A^+ = V^T \Lambda^{-1} U$ является для матрицы A псевдообратной.*

Доказательство. Согласно теореме 1 и выражению (16) $A^+A = V\Lambda^{-1}U^T U\Lambda V^T = I_m$, $AA^+ = U\Lambda V^T V\Lambda^{-1}U^T = I_n$. $\square$

Определим A^+ как

$$A^+ = V\Lambda_r^{-1}U^T, \tag{17}$$

где $\Lambda_r^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_r^{-1}, 0, ..., 0)$ — диагональная матрица размерности $n \times n$.

Обозначим исходные значения векторов интегрального индикатора и весов показателей соответственно $\mathbf{q}_0 : \mathbf{q}_0 \in Q \subseteq \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{w}_0 : \mathbf{w}_0 \in W \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0 \text{ и } \mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0.$$

Зададим отрезки $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0] \subset Q$ и $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0] \subset W$. Используем Евклидову длину этих отрезков $\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1\|$ и $\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|$ как меру несогласованности экспертных оценок. Найдем согласованные оценки на этих отрезках. Для этого найдем выпуклые линейные комбинации векторов $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$, и $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$ в виде

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{w}_\alpha : \mathbf{w}_\alpha &= (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha\mathbf{w}_1\} &\in [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1], \\
\{\mathbf{q}_\beta : \mathbf{q}_\beta &= \beta\mathbf{q}_0 + (1-\beta)\mathbf{q}_1\} &\in [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1],
\end{aligned}$$

где $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

Утверждение 1. *Существуют такие α, β, при которых значения векторов $\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{q}_\beta$ удовлетворяют требованиям согласования, т. е. $A\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{q}_\beta$, причем $\alpha = 1 - \beta$.*

Доказательство. Так как $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0$ и линейный оператор $A : [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1] \longrightarrow [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$, то равенство $(1-\alpha)A\mathbf{w}_0 + \alpha A\mathbf{w}_1 = (1-\beta)\mathbf{q}_0 + \beta\mathbf{q}_1$ справедливо при $\alpha = 1 - \beta$. $\square$

Таким образом, согласованные экспертные оценки находятся с помощью выражения

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_\alpha &= (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0, \\
\mathbf{q}_\alpha &= \alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0,
\end{aligned} \tag{18}$$

где $\alpha : \alpha \in [0, 1]$ — параметр доверия экспертным оценкам интегральных индикаторов объектов либо экспертным оценкам весов показателей. При значении $\alpha = 0$ мы игнорируем экспертные оценки объектов, учитывая оценки весов; при значении $\alpha = 1$ мы игнорируем экспертные оценки весов, учитывая оценки объектов.

Очевидно, что процедура α-согласования дает согласованный результат.

Утверждение 2. *Тройка* $(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha, A)$, *полученная процедурой α-согласования (18) удовлетворяет требованиям согласования (15).*

Доказательство. Подставив в равенство $A\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha$ выражения для $\mathbf{q}_\alpha$ и $\mathbf{w}_\alpha$, получаем

$$\alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 = A\left((1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0\right), \text{или}$$
$$\alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 = (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 + \alpha AA^+\mathbf{q}_0.$$

Так как $AA^+\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0$, то $\alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 = (1-\alpha)A\mathbf{w}_0 + \alpha\mathbf{q}_0$. $\square$

Таким образом, выбирая параметр α с помощью выражения (18), находим согласованные значения векторов экспертных оценок $\mathbf{q}_\alpha = A\mathbf{w}_\alpha$. Оценим невязку при выбранном параметре α. Евклидово расстояние между исходными векторами $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ и полученными векторами $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ в пространстве интегральных индикаторов и в пространстве весов соответственно равны

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \|\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_0\|^2, \\ \delta^2 &= \|\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_0\|^2. \end{aligned}$$

В качестве критерия выбора параметра α возьмем условие минимального расстояния между начальными и согласованными экспертными оценками в обоих пространствах Q и W. Учитывая, что размерности этих пространств соответственно равны m и n, нормируем квадраты расстояний и находим такие согласованные значения векторов $\mathbf{q}_\alpha$ и $\mathbf{w}_\alpha$, что они удовлетворяют условию

$$\frac{\varepsilon^2}{m-1} = \frac{\delta^2}{n-1}. \tag{19}$$

На практике экспертам предлагают выбирать значение параметра α в зависимости от предпочтений оценок объектов или оценок показателей. Полученные результаты предлагаются экспертам на обсуждение в следующем виде:

$$\begin{array}{c|c|c}
\text{init} & & \mathbf{w}_0^T \\ \hline
 & \text{fin} & \mathbf{w}_\alpha^T \\ \hline
\mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_\alpha & A
\end{array}$$

При изменении параметра доверия экспертов α к экспертным оценкам объектов и показателей или при изменении самих экспертных оценок описанная выше процедура повторяется, и на обсуждение экспертов передаются вновь полученные результаты.

3.2. γ^2-согласование

Определим согласованное решение как решение, удовлетворяющее условию (15), при котором расстояние от согласованных векторов $\mathbf{q}_\gamma$ и $\mathbf{w}_\gamma$, таких что $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$ до соответственно векторов экспертных оценок $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{w}_0$ будет минимальным. Пусть

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2, \\ \delta^2 &= \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Решение задачи нахождения минимального расстояния от согласованных векторов до векторов экспертных оценок имеет вид

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg\min_{\mathbf{w}\in W}(\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2), \tag{21}$$

где весовой множитель $\gamma^2 \in (0, \infty)$ определяет степень компромисса между оценкой объектов и показателей. При малых значениях γ^2 в большей степени учитывается экспертная оценка объектов, а при больших значениях γ^2 в большей степени учитывается экспертная оценка показателей.

Теорема 3. *Функционал* $(\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2)$ *достигает единственного глобального минимума на множестве* $\mathbf{w}_\gamma \in W$ *в точке*

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1}(A^T\mathbf{q}_0 + \gamma^2\mathbf{w}_0). \tag{22}$$

Доказательство. Функционал $(\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2)$ есть строго выпуклая функция, поэтому точка минимума выражения (21) существует и единственна. Найдем эту точку. Подставляя правые части выражения (20) в выражение (21) получаем

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg\min_{\mathbf{w}\in W}\left(\|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2 + \gamma^2\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2\right).$$

Используем обозначение нормы вектора $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_i x_i^2$ через скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Представим функционал $(\varepsilon^2 + \gamma^2\delta^2)$ в виде

$$\begin{aligned}
&\|A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0\|^2 + \gamma^2\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2 = \\
&(A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0, A\mathbf{w} - \mathbf{q}_0) + \gamma^2(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0, \mathbf{w} - \mathbf{w}_0) = \\
&(A^T A\mathbf{w} - 2A^T\mathbf{q}_0 + \gamma^2\mathbf{w} - 2\gamma^2\mathbf{w}_0, \mathbf{w}) + (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0) + \gamma^2(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0).
\end{aligned}$$

Полученное выражение имеет минимум по $\mathbf{w}$ при значении $\nabla_{\mathbf{w}} = 0$, где

$$\nabla_{\mathbf{w}} = 2(A^T A + \gamma^2 I)\mathbf{w} - 2(A^T\mathbf{q}_0 + \gamma^2\mathbf{w}_0),$$

здесь I — единичная матрица, размерность которой равна размерности матрицы $A^T A$. Из предыдущего выражения находим вектор $\mathbf{w}_\gamma \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет условию (21):

$$\mathbf{w}_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1}(A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0).$$

$\square$

Утверждение 3. *Тройка* $(\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma, A)$*, полученная процедурой* γ^2*-согласования*

$$\mathbf{w}_\gamma \;\; = \;\; (A^T A + \gamma^2 I)^{-1}(A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0),$$

удовлетворяет требованиям согласования (15).

Доказательство. Так как $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$, то $A(A^T A + \gamma^2 I)^{-1}(A^T \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0) = A\mathbf{w}_\gamma$. $\square$

Параметр γ^2 для получения согласованных векторов $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$ и $\mathbf{w}_\gamma$ выбирается исходя из условия $\frac{\varepsilon^2}{m-1} = \frac{\delta^2}{n-1}$ или назначается экспертами. Некоторые способы выбора параметра γ^2 описаны также в [16].

3.3. τ-согласование

Предложена процедура, где с оценками $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ разрешены любые монотонные преобразования, т. е. введено отношение порядка на множестве элементов векторов $\mathbf{w}_0 = \{w_j : w_1 \leqslant ... \leqslant w_n\}_{j=1}^n$ и $\mathbf{q}_0 = \{q_i : q_1 \leqslant ... \leqslant q_m\}_{i=1}^m$, которое задает соответственно конусы $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^m$. При нахождении согласованных оценок вводились монотонные корректирующие функции $T_\mathcal{Q} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$ и $T_\mathcal{W} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$, приближающие начальные экспертные оценки при сохранении отношения порядка.

Дана тройка $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$. Найдем такие векторы $\mathbf{q}_\tau = T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{q}_0)$ и $\mathbf{w}_\tau = T_{\mathcal{W}}(\mathbf{w}_0)$, что выполняется условие минимума невязки

$$AT_{\mathcal{W}}(\mathbf{w}_0) - T_{\mathcal{Q}}(\mathbf{q}_0) = \Delta. \tag{23}$$

Для $k = 0, ..., K$ укажем такие векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{k+1} &= T_{\mathcal{W},k}(\mathbf{w}_k, A^{+}\mathbf{q}_k), \\ \mathbf{q}_{k+1} &= T_{\mathcal{Q},k}(\mathbf{q}_k, A\mathbf{w}_k), \end{aligned} \tag{24}$$

которая доставляют минимум функционалу $\|\Delta_k\|^2 = \|A\mathbf{w}_k - \mathbf{q}_k\|^2$. Векторы $\mathbf{q}_\tau, \mathbf{w}_\tau$, находим в результате композиции $T_{\mathcal{Q}} = T_{\mathcal{Q},1} \circ ... \circ T_{\mathcal{Q},K}$ и $T_{\mathcal{W}} = T_{\mathcal{W},1} \circ ... \circ T_{\mathcal{W},K}$.

Нахождение корректирующей функции T. Рассмотрим два множества $\mathbf{x} = \{x_1, ..., x_m\}$ и $\mathbf{t} = \{t_1, ..., t_m : t_1 \leqslant ... \leqslant t_m\}$. Множество пар $\phi = \{(t_1, x_1), ..., (t_m, x_m)\}$ задают функцию ϕ, и $x_i = \phi(t_i)$. Функция ϕ, вообще говоря, немонотонна. Найдем такую монотонную функцию $f : t \longrightarrow x$, $f \in P_m$ которая аппроксимирует ϕ,

$$f(t) = \arg\min_{f \in P_m} \sum_{i=1}^{m} \Big(f(t_i) - \phi(t_i)\Big)^2,$$

где P_m — множество всех возрастающих полиномов степени $p \leqslant m$. Также найдем такую функцию $\varphi : t \longrightarrow x, \varphi \in \Theta$, которая интерполирует множество пар ϕ:

$$\varphi(t) = \arg\min_{\varphi \in \Theta} \|\varphi(t) - \phi(t)\|,$$

где Θ — множество полиномиальных сплайнов с m узлами степени r дефекта 1.

Для приближения функции φ функцией f воспользуемся методом касательных Ньютона-Канторовича. Рассмотрим $f(t), \varphi(t)$

на отрезке $S=[a,b]\ni t$. Требуется найти гомеоморфизм $\vartheta : S \longrightarrow S, \vartheta(t)=t+\tau(t)$, такой, что

$$\vartheta = \arg\min_{\tau\in S}\|f(t)-\varphi(\vartheta(t))\|^2,$$

при значении $\tau = O(t)$. Для нахождения τ представим $\varphi(\vartheta(t))$ в виде $\varphi(\vartheta(t)) = \varphi(t)+\tau(t)\varphi'(t)+O(\tau^2(t))$.

Теорема 4 (В. В. Шакина). *Решением задачи оптимизации*

$$\tau_\epsilon(t) = \arg\min_{\tau\in S}\Big(\|f(t)-\varphi(t)\|^2+\epsilon^2\|\tau(t)\|^2\Big)$$

является выражение

$$\tau_\epsilon(t) = \frac{\Big(f(t)-\varphi(t)\Big)\varphi'(t)}{\Big(\varphi(t)\Big)^2+\epsilon^2}.$$

Зададим искомую функцию $T:\mathbf{x}\longrightarrow\mathbf{y}$ следующим образом. Подставляя в найденную функцию $\varphi(\vartheta(t))$ значения t_i из ϕ получаем скорректированные оценки $y_i=\varphi(\vartheta(t_i))$, $i=1,...,m$. Параметр ϵ^2, определяющий, насколько велика разность между значениями, которые принимает функция φ в точках t и $\vartheta(t)$, подбирается таким образом, чтобы функция $T(\vartheta(t))$ была монотонной.

3.4. Регуляризация при согласовании экспертных оценок

Очень важной проблемой при нахождении согласованных оценок становится проблема выбора алгоритма вычисления псевдообратного оператора $A^+ : Q\longrightarrow W$. Предлагается следующее решение. Задано множество $\Omega=\{\omega_1,...,\omega_k\}$, алгоритмов вычисления псевдообратного оператора A^+. Из данного множества выбирается такой алгоритм ω, что для полученного $A^+ = A^+(\omega)$ имеет место $\min_{\omega\in\Omega}(\frac{\varepsilon^2}{m-1} + \frac{\delta^2}{n-1})$, где $\varepsilon^2 = \|\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_0\|^2$, и $\delta^2 = \|\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w}_0\|^2$.

Для решения задачи были предложены два способа нахождения псевдообратного оператора A^+: регуляризация псевдообратного оператора методом Тихонова и обращение усеченного сингулярного разложения. В первом случае был найден псевдообратный оператор $A^+ = (A^TA+\gamma^2I)^{-1}$ со значением регуляризующего параметра γ^2, см. выражение (22).

Алгоритм обращения матрицы посредством усеченного сингулярного разложения состоит в следующем. Пусть матрица исходных данных A представлена в виде $A = U\Lambda V^T$. Тогда при нахождении обратной матрицы $A^+ = V\Lambda^{-1}U^T$ в силу ортогональности матриц U и V: $U^TU = VV^T = I$ и в силу условия убывания диагональных элементов матрицы $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ псевдообратная матрица A^+ будет более зависеть от тех элементов матрицы Λ, которые имеют меньшие значения, чем от первых сингулярных чисел. Действительно, если по условию теоремы о сингулярном разложении матрица A имеет сингулярные числа $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$, то сингулярные числа матрицы A^+ равны $\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n})$ и $\frac{1}{\lambda_1} \leqslant \frac{1}{\lambda_2} ... \leqslant \frac{1}{\lambda_n}$. Считая первые r сингулярных чисел определяющими собственное пространство матрицы A, используем при обращении матрицы A первые r сингулярных чисел. Тогда обратная матрица A^+ будет найдена как $A^+ = V\Lambda_r^{-1}U^T$.

Для обоснования предложенных методов согласования докажем следующие теоремы. Лемма о непрерывности обратного отображения, впервые сформулированная А. Н. Тихоновым, приведена в обозначениях, принятых ранее в настоящей работе.

Лемма 1 (А. Н. Тихонова). *Пусть метрическое пространство* $\mathbb{W}$ *отображается на метрическое пространство* $\mathbb{Q}$ *и* Q *— образ множества* W*,* $W \subset \mathbb{W}$*, при этом отображении. Если отображение* $A : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *непрерывно, взаимнооднозначно и множество* W *компактно на* $\mathbb{W}$*, то обратное отображение* $A^+ : Q \longrightarrow W$ *множества* Q *на множество* W *также непрерывно по метрике пространства* $\mathbb{W}$*.*

Тройка $(\mathbf{q}, \mathbf{w}, A)$ определена на следующих метрических пространствах. Вектор $\mathbf{q}$ является элементом Q, где область Q является компактной в $\mathbb{Q}$: $Q \subset \mathbb{Q} \equiv \mathbb{R}^m$, так как область Q замкнута и ограничена. Также вектор $\mathbf{w}$ является элементом W, где область W является компактной в $\mathbb{W}$: $W \subset \mathbb{W} \equiv \mathbb{R}^n$, так как область W замкнута и ограничена. Метрика задается нормами векторов $\|\mathbf{q}\|^2$ для компакта Q и $\|\mathbf{w}\|^2$ для компакта W. Функционал $\rho_{\mathbb{Q}} = \rho_{\mathbb{Q}}(A\mathbf{w}, \mathbf{q})$ определим как $\rho_{\mathbb{Q}} = \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}\|^2$.

Следствие 1. *Псевдообратный оператор* A^+*, определенный как* $A^+ = (A^TA + \gamma^2 I)^{-1}$*, является непрерывным по метрике пространства* $\mathbb{W}$*.*

Теорема 5. *Оператор* $A^+ = U^T \Lambda_r V$*, полученный методом обращения усеченного сингулярного разложения, является непрерывным в* r*-мерном подпространстве.*

Доказательство. Отметим, что оператор A является обратным для оператора $A^+ : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{W}$. Оператор A^+ определен в пространстве $\mathbb{R}^r$, так как согласно теореме о сингулярном разложении матрицы U и V являются ортогональными, а матрица Λ является диагональной. Матрица Λ_r получается из матрицы Λ

путем замены части диагонали, начиная с элемента с номером $r+1$, нулевыми значениями. Прообраз $A(G)$ всякого открытого в $\mathbb{W}$ множества G открыт в $\mathbb{Q}$ в силу того, что A — линейный оператор. Также прообраз $A(F)$ всякого замкнутого в $\mathbb{W}$ множества F замкнут в $\mathbb{Q}$. Следовательно, оператор A^+ непрерывен в r-мерном подпространстве. $\square$

Так как оператор A в уравнении $A\mathbf{w} = \mathbf{q}$ вполне непрерывный, то построение устойчивого к малым изменениям правой части $\mathbf{q}$ приближенного решения этого уравнения по формуле $\mathbf{q} = A^+\mathbf{w}$ возможно в тех случаях, когда решение ищется на компакте $W \subset \mathbb{W}$ и правая часть уравнения принадлежит множеству AW.

Покажем, что согласованные векторы $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}$, получаемые с помощью процедур согласования, являются единственными.

Утверждение 4. *Для данного параметра $\alpha \in (0,1)$ и псевдообратного оператора A^+, определенного как $A^+ = U\Lambda_r V^T$, задача α-согласования (18) имеет единственное решение $(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha, A)$.*

Утверждение 5. *Для данного параметра $\gamma^2 \in (0,\infty)$ задача γ^2-согласования (22) имеет единственное решение $(\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma, A)$.*

Задача нахождения тройки $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{w}}, A)$ называется корректно поставленной на паре метрических пространств $(\mathbb{Q}, \mathbb{W})$, если удовлетворяются условия:

1) для всякого элемента $\hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{Q}$ существует решение $\hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{Q}$;

2) решение определяется однозначно;

3) задача устойчива на пространствах $\mathbb{Q}, \mathbb{W}$.

Таким образом, мы получили решения задач (18) и (22), корректные по Адамару.

4. Описание библиотеки функций

Для вычисления интегральных индикаторов по данным измерений и экспертным оценкам было разработано специальное программное обеспечение. Оно включает библиотеки, написанные на языке *Mathematica* и средства визуализации результатов нахождения интегральных индикаторов объектов и весов показателей. Ниже приводится список библиотечных функций с их кратким описанием. Все основные результаты были получены с помощью приведенных ниже функций.

Для функций `ColumnNormalize`, `MinkowskiDistance`, `PrincipalComponents`, `SingularComponents`, `ParetoClassify`, не выполняющих процедуры согласования, исходными данными является матрица $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, в которой строки соответствуют объектам, а столбцы соответствуют показателям. Матрица A при описании функций обозначается `matrix`. Результатом работы функций является вектор интегральных индикаторов, соответствующих объектам.

Для функций `AlphaConcordance`, `GammaConcordance` и `TauConcordance` исходными данными является тройка $(\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0, A)$. Тройка при описании функций обозначается `triplet`. Результатом работы функций является согласованная тройка $(\mathbf{q}, \mathbf{w}, A)$.

Функция `ColumnNormalize[matrx, options]` возвращает нормированную матрицу, где элементы $\mathbf{a}_{\cdot j}$ каждого столбца исходной матрицы отображаются в элементы нормированной матрицы $\bar{\mathbf{a}}_{\cdot j}$, которые находятся в интервале $[0, 1]$. Максимальный по значению элемент j-го столбца $\mathbf{a}_{\cdot j}$ линейно отображается в единицу, минимальный элемент столбца $\mathbf{a}_{\cdot j}$ — в ноль. Дополнительными параметрами являются вектор наилучших значений `Ideal` и параметр центрирования `Center`. Вектор наилучших значений является набором элементов, каждый из которых принимает значение из множества $\{0, 1\}$. Каждому столбцу матрицы исходных данных поставлен в соответствие элемент вектора наилучших значений. Если элемент принимает значение ноль, то минимальный элемент столбца линейно отображается в единицу, а максимальный — в ноль. Если значение параметра центрирования `Center` определено как `True`, то каждый столбец матрицы линейно отображается так, что среднее арифметическое элементов j-го столбца равно нулю. Пример: `An=ColumnNormalize[{{1,4},{3,2}}, Ideal→{0,1}, Center→True]`.

Функция `MinkowskiDistance[matrix, k]` возвращает вектор, каждый элемент которого является k-нормой соответствующей вектор-строки данной матрицы [15]. Значение k должно находиться в области положительных действительных чисел. Для того чтобы найти взвешенную норму вектора $\mathbf{a}_{i\cdot}$, исходную матрицу A следует умножить слева на вектор весов $\mathbf{w}$. Пример: `q=MinkowskiDistance[A, 2]`.

Функция `PrincipalComponents[matrix]` возвращает значения главных компонент (ГК). Первая строка возвращаемого списка есть первая ГК исходной матрицы. Элементы матрицы `matrix` должны принадлежать множеству действительных чисел. Функция преобразует исходную матрицу так, что ковариационная матрица матрицы ГК является диагональной и содержит на диагонали невозрастающую последовательность компонент. Исходная матрица центрируется. Дополнительным параметром является параметр `AllCompomemts`. Если значение `AllComponents`

$\to$ `False`, то функция возвращает только первую ГК (установлено по умолчанию). Пример: `q=PrincipalComponents[An, AllComponents→True][[1]]`.

Функция `SingularComponents[matrix]` возвращает проекцию всех векторов-строк исходной матрицы на ось, соответствующую наибольшему сингулярному числу. Исходная матрица A преобразуется таким образом, что все вектор-строки находятся в положительном ортанте. Пример: `q=SingularComponents[An]`.

Функция `ParetoClassify[matrix]` возвращает вектор, значение каждого компонента которого есть номер слоя расслоения Парето, в котором находится соответствующая вектор-строка исходной матрицы. При расслоении внешний слой получает максимальный номер, соответствующий количеству строк исходной матрицы, а внутренний слой получает номер один. Пример: `q=ParetoClassify[A]`.

Для функций `AlphaConcordance`, `GammaConcordance` и `TauConcordance`, реализующих алгоритмы согласования экспертных оценок, разработан специальный формат хранения данных `triplet`, описывающий тройку $\{\mathbf{w}_0, \mathbf{q}_0, A\}$, где первая строка и первый столбец — экспертные оценки соответственно весов показателей $\mathbf{w}_0$ и интегральных индикаторов $\mathbf{q}_0$. Вторая строка — назначенный экспертами идеальный вектор $\mathbf{i}_0$, указывающий, на то, какие значения показателей являются лучшими при оценке данного объекта — более высокие или более низкие. Остальная часть таблицы — матрица данных A.

Функция `UnpackData[data]` возвращает множество $E = \{\mathbf{w}_0, \mathbf{i}_0, \mathbf{q}_0, A\}$, где $\mathbf{w}_0$ — экспертные оценки показателей, $\mathbf{i}_0$ — описание показателей наилучшего объекта, $\mathbf{q}_0$ — экспертные оценки объектов, A — матрица исходных данных. Данная функция предназначена для распаковки внешних импортируемых данных с целью предварительной обработки и формирования троек `triplet`. Пример использования функции в контексте работы с библиотекой `Concordance`:

```
<< Custom'Concordance'
data=Import[''c://zapovedniki//ohrana.dat'',''Table''];
{w0, i0, q0, A}=UnpackData[data];
An=ColumnNormalize[A, Ideal→i0, Center→False];
Triplet={w0, q0, An};
```

Функция `AlphaConcordance[triplet, alpha, options]` возвращает список, состоящий из двух векторов: $\{\mathbf{w}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha\}$. Исходными данными для функции являются тройка `triplet` и параметр `alpha`, настраиваемый экспертами. Дополнительным параметром является `Print`, значение которого по умолчанию равно `False`. В случае `Print→True` функция печатает отчет о ходе процедуры согласования. Пример: `{wa, qa}=AlphaConcordance[Triplet, 0.5, Print→True]`.

Функция `GammaConcordance[triplet, alpha, options]` возвращает список, состоящий из двух векторов: $\{\mathbf{w}_\gamma, \mathbf{q}_\gamma\}$. Исходными данными для функции являются тройка `triplet` и параметр `gamma`, настраиваемый экспертами. Дополнительным параметром является `Print`, значение которого по умолчанию равно `False`. В случае `Print→True` функция печатает отчет о ходе процедуры согласования. Пример: `{wg, qg}=GammaConcordance[Triplet, 1.]`.

Функция `TauConcordance[triplet, alpha, options]` возвращает список, состоящий из двух векторов: $\{\mathbf{w}_\tau, \mathbf{q}_\tau\}$. Исходными данными для функции являются тройка `triplet`. Пример: `{wt, qt}=TauConcordance[Triplet]`.

Для проверки целостности данных в библиотеку включены функции `NumericMatrixQ[matrix]` и `ConcordanceTripletQ[triplet]`, возвращающие значения `True` или `False` в зависимости от того, соответствует структура входных данных объявленной ранее структуре или нет.

Для отчета о ходе процедур согласования в библиотеку включены функции `AlphaPlot`, `GammaPlot` и `MultiPlot`, показывающие на экране графическую информацию. Для проверки работы библиотеки включены функции `MakeExpert` и `MakeData`, генерирующие тестовые данные, соответствующие принятым ранее моделям порождения данных.

5. Результаты построения интегральных индикаторов

При анализе эффективности управления заповедниками эксперты руководствуются ежегодными отчетами, которые заполняются по результатам работы заповедников. Форма ежегодного отчета однозначно определена для всех заповедников и состоит из нескольких десятков измеряемых показателей. Например, в отчетах государственных заповедников Российской Федерации за 2000 г. было 96 показателей. Для оценки эффективности управления заповедниками экспертам был предложен специально составленный сборник анкет [5]. В данном сборнике экспертам предлагалось дать оценку эффективности работы заповедника по различным критериям.

В качестве исходных данных рассмотрим матрицу A, включающую в себя 23 заповедника, указанных экспертами. Число обусловленности матрицы A равно $æ_A = 64.94$. При нахождении интегрального индикатора "без учителя" к матрице исходных данных применялись три процедуры нахождения интегральных индикаторов — вычисление нормы в метрике Минковского, метод главных компонент и метод сингулярного разложения. Вычисленные индикаторы $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, $\mathbf{q}_2 = \bar{A}\mathbf{c}_{\cdot 1}$ и $\mathbf{q}_3 = U\lambda_1$ слабо коррелируют с интегральным индикатором $\mathbf{q}_0$, предполагаемом экспертами: $r_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_0} = -0.15$, $r_{\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_0} = -1.14$, $r_{\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_0} = -0.34$.

Таким образом, для того чтобы получить удовлетворительные для экспертов результаты, минимально противоречащие экспертным оценкам и исходным данным, требуется выполнить процедуру согласования экспертных оценок.

Были использованы два метода согласования, давшие примерно одинаковые оценки интегральных индикаторов, которые эксперты сочли удовлетворительными. Параметры доверия α и γ^2 решено было назначить исходя из условия (19). В данном случае $\alpha = 0.32575$, $\gamma^2 = 0.93376$. При минимальном значении параметра α близки исходная оценка

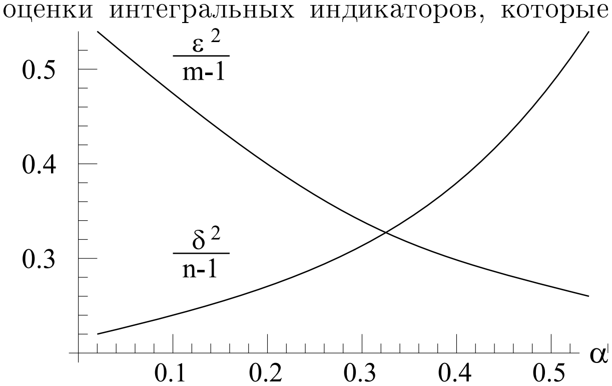

Рис. 1: Зависимость расстояний ε и δ от α

индикатора $\mathbf{q_0}$ и согласованная оценка $\mathbf{q}_\alpha$. При максимальном значении параметра α близки исходная оценка весов показателей $\mathbf{w_0}$ и согласованная оценка $\mathbf{w}_\alpha$. При некотором значении α расстояния от обоих согласованных векторов до соответствующих им исходных векторов становятся одинаковы: $\frac{\varepsilon^2}{m-1} = \frac{\delta^2}{n-1}$. Изменение расстояний ε^2, δ^2 при выборе параметра $\alpha \in [0,1]$ можно увидеть на рис. 1. Здесь по оси абсцисс отложено значение α, а по оси ординат значения ε, δ. При увеличении α расстояние ε между векторами $\mathbf{q_0}$ и $\mathbf{q}_\alpha$ увеличивается, а расстояние δ между векторами $\mathbf{w_0}$ и $\mathbf{w}_\alpha$ уменьшается.

Применим к рассматриваемым экспертным оценкам процедуру τ-согласования. Данная процедура не дает в общем случае согласованных оценок. Процедура отображает векторы экспертных оценок $\mathbf{q}_0, \mathbf{w}_0$ соответственно в такие векторы $\mathbf{q}_\tau$ и $\mathbf{w}_\tau$, которые минимизируют невязку $\|\Delta\|^2$ уравнения $A(T_w(\mathbf{w}_0)) = T_q(\mathbf{q}_0) + \Delta$.

Результаты работы процедуры τ-согласования использовались в качестве входной тройки для процедуры γ^2-согласования с целью получения согласованных экспертных оценок. Для оценки работ различных процедур согласования воспользуемся полученным расстоянием от векторов экспертных оценок до согласованных векторов. Результаты сравнения работ алгоритмов показаны в табл. 1.

Процедура	$\frac{\varepsilon^2}{m-1} + \frac{\delta^2}{n-1}$
α-согласование	0.67
γ^2-согласование	0.62
τ-γ^2-согласование	0.59

Таблица 1: Расстояние между векторами экспертных оценок и согласованными векторами

Как видно из приведенной выше таблицы, расстояние $\frac{\varepsilon^2}{m-1} + \frac{\delta^2}{n-1}$, полученное с помощью процедуры γ^2-согласования меньше, чем расстояние, полученное с помощью процедуры α-согласования, так как во втором случае согласованные векторы $\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha$ принадлежат соответственно отрезкам $[\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$ и $[\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1]$, а в первом случае согласованные векторы $\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma$ лежат в окрестности соответственно векторов $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{w}_0$. Композиция процедур τ-согласования и γ^2-согласования дает еще меньшее суммарное расстояние $\frac{\varepsilon^2}{m-1} + \frac{\delta^2}{n-1}$.

6. Заключение

Алгоритмы вычисления интегральных индикаторов по измеряемым данным предполагают, что веса показателей выставлены достаточно точно, чтобы получать адекватные с точки зрения экспертов результаты. При решении практических задач возникает проблема назначения этих весов. В данной работе был предложен подход, при котором веса показателей и оценки объектов, выставленные экспертами, согласуются с помощью специальной процедуры. В результате этой процедуры, во-первых, получены обоснованные и адекватные с точки зрения экспертов интегральные индикаторы объектов. Во-вторых, получены веса показателей, делающие алгоритм вычисления интегрального индикатора устойчивым к изменению измеряемых данных и пригодным к дальнейшему использованию уже без участия экспертов.

Литература

1. *Айвазян С. А.* Интегральные индикаторы качества жизни населения: их построение и использование в социально-экономическом управлении и межрегиональных сопоставлениях. М.: ЦЭМИ РАН, 2000. С. 56.

2. *Шакин В. В.* К объективизации работы жюри. Линейная модель связи ценности объектов и индексов. /Под ред. А. С. Кулагина. //Методика и техника статистической обработки материалов социологических исследований идеологической работы. М.: Академия общественных наук при ЦК КПСС, 1972. С. 251.

3. *Стрижов В. В., Шакин В. В., Благовидов В. В.* Согласование экспертных оценок //Тез. док. "Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества". М. МЭСИ, 2001. С. 30.

4. *Hocking, M., Stolton, S. and Dudley, N.* Evaluating Effectiveness: A Framework for Assessing the Management of Protected Areas. Gland, Switzerland and Cambridge, UK.: IUCN, 2000. x+121pp.

5. IUCN-CIDA-WWF. Экспертно-статистический метод оценки эффективности работы ООПТ. Сборник анкет. Рукопись. М.: IUCN, 2001 18 с.

6. *Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика //Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989. С. 334.

7. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical Recipies in C: The Art of scientific Computing NY: Cambridge University Press, 1992. P. 456.

8. *Шакин В. В.* Вычислительные процедуры для опознавания векторных функций // Опознавание и описание линий М.: Наука, 1972. С. 58-77.

9. *Форсайт Дж., Молер К.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969. С. 15-18.

10. *Пинскер И. Ш.* Представление функций многих переменных при помощи суммирующих, множительных и простейших функциональных устройств. //Труды ИМАШ. Семинар по точности в машиностроении и приборостроении, вып. 8. М., 1965.

11. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. С. 20-22.

12. *Шакин В. В.* Парето-классификация конечных выборок. //Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества продукции. V-я науч. конф. стран СНГ. Тез. докл. М.: Центральный экономико-математический институт РАН, 1993. С. 96-97.

13. *Литвак Б. Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа. М.: Радио и связь, 1982. С. 69-88.

14. *Белкин А. Р., Левин М. Ш.* Принятие решений: комбинаторные методы аппроксимации информации. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. (Теория и методы системного анализа). С. 40-42.

15. *Голуб Дж., Ван-Лоун Ч.* Матричные вычисления М.: Мир, 1999. С. 223.

16. *Hansen, Per Christian.* Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems, SIAM, Philadelphia, 1998. P. 29-31.

Содержание